This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

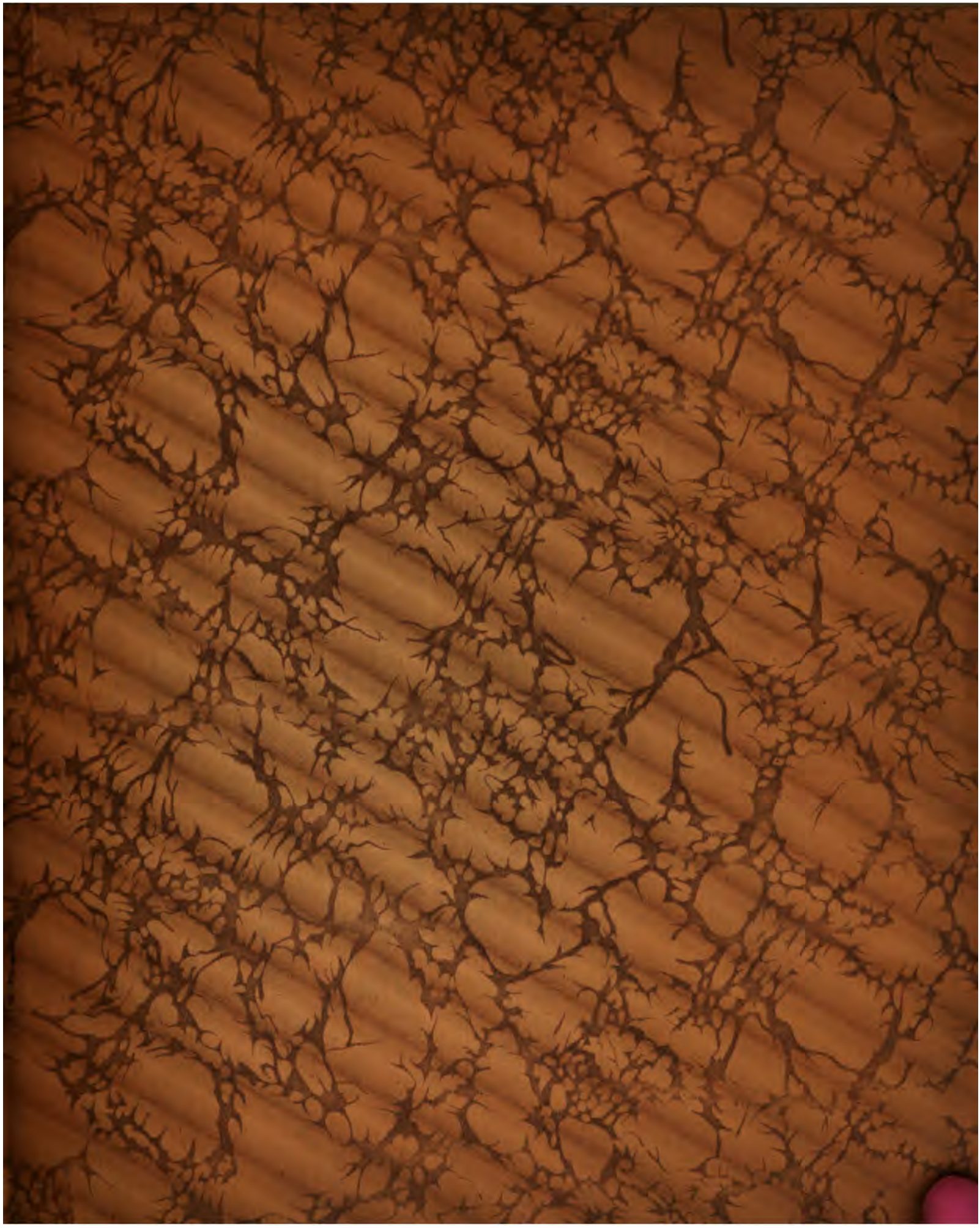
Math 008 2.7

SCIENCE CENTER LIBRARY

HARVARD

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON

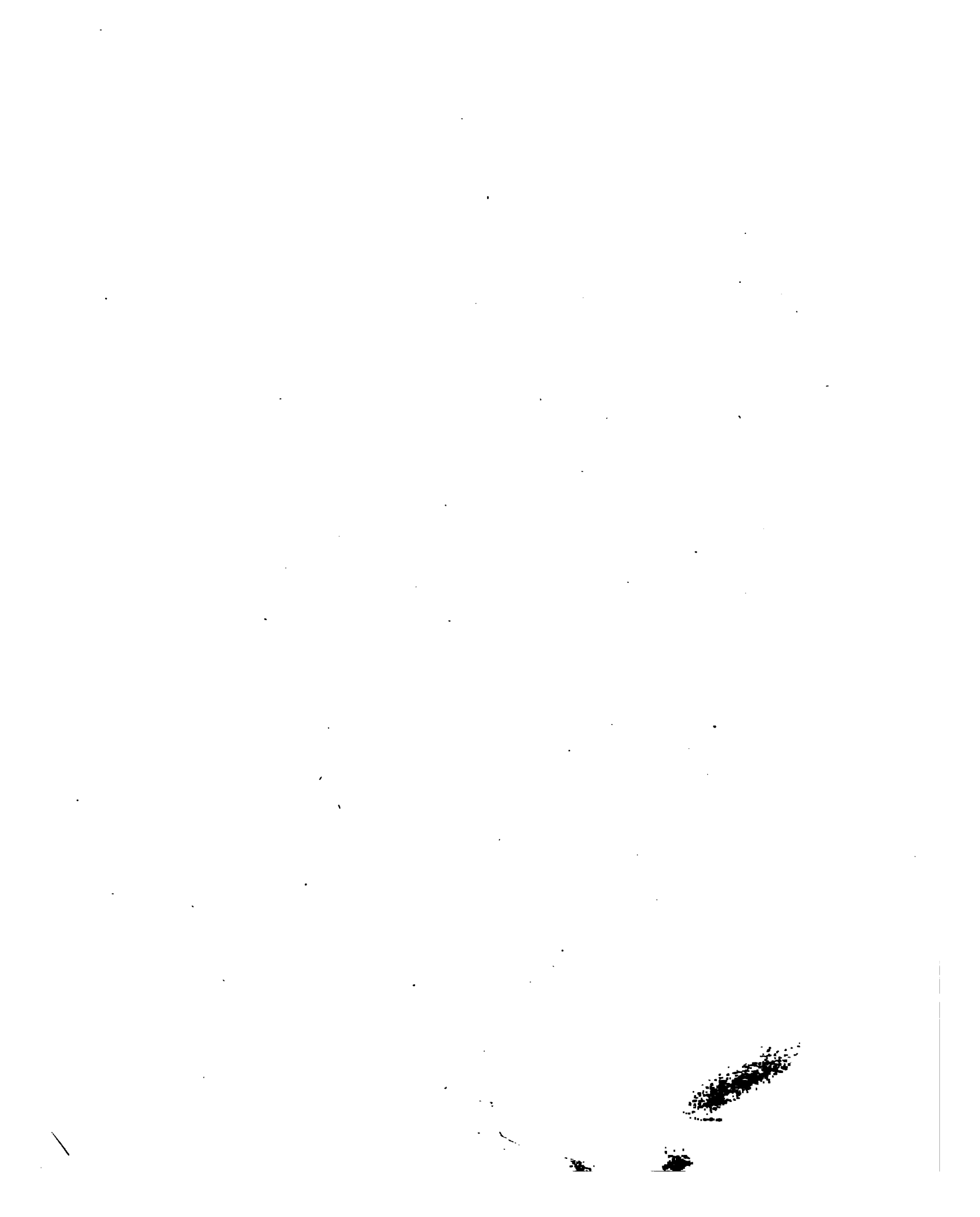
FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION



Gülru –

Please note early due date –
Sci. Ctr. Lib.

MÉLANGES DE CALCUL INTÉGRAL



MÉLANGES DE CALCUL INTÉGRAL.

JOAQUIM GOMES DE SOUZA.

MÉLANGES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

OUVRAGE POSTHUME

AUGMENTÉ D'UN MÉMOIRE DE L'AUTEUR SUR LE SON

ET

D'UN AVANT-PROPOS

PAR

M. CHARLES HENRY.

LEIPZIG,

IMPRIMERIE DE F. A. BROCKHAUS.

1882.

Math 3008.82.7
V

HARVARD COLLEGE
SEP 1- 1922
LIBRARY

DEGRAND FUND

AVANT-PROPOS

SUR L'AUTEUR.[1]

Pour la plupart des savants la vie n'est qu'un long raisonnement. Ils ne connaissent ni les séductions du monde, ni les enivrements de l'art, ni les généreuses utopies. Une date, quelques titres de travaux et de fonctions, puis une autre date et leur histoire est faite. Leur vie est tellement un désert que l'on est parfois tenté de maudire la passion qui les a desséchés.

Il n'en est pas de même de l'éminent géomètre dont nous publions aujourd'hui l'œuvre posthume: Joaquim Gomes de Souza attache à la fois par l'œuvre et la personnalité.

Né au Brésil, le 15 février 1829, dans la province de Maranhão, où son père, le major Ignacio José de Souza, possédait des propriétés, il manifesta dès la plus tendre enfance un goût décidé pour les études psychologiques et physiques. Malheureusement sa famille le destinait à la carrière des armes et il dut, sans la moindre vocation, s'enrôler comme cadet après avoir fréquenté pendant un an l'École militaire. Ce fut pour le jeune savant un supplice, mais un supplice qui ne dura pas longtemps; ne pouvant supporter les fatigues du métier, enfin il obtint de son père la permission de se consacrer à la médecine.

En 1844, il entra donc à l'École de Rio de Janeiro. Comme on pouvait s'y attendre, il y brilla d'un talent hors ligne. Cependant il étudiait en même temps les mathématiques et avec une telle ardeur qu'après avoir passé brillamment les épreuves de l'école de médecine, il demandait à subir l'examen d'ingénieur. Son succès fut aussi éclatant.

Ce n'est pas tout. Ingénieur et médecin, il adorait l'art et non pas seulement l'art d'un pays, une littérature de quelques clochers, mais la littérature sous toutes ses formes et dans toute son universalité. Plus tard dans la préface d'un livre, sur lequel nous reviendrons, il débutait ainsi: «Avec le progrès croissant de la civilisation et l'étendue qu'ont prise nos connaissances, il s'est établi un tel lien de fraternité entre les nations qu'il n'y a plus personne qui puisse se contenter de la littérature de son propre pays et qui, en franchissant les limites physiques du lieu qui l'a vu naître, ne s'efforce de cueillir dans d'autres climats ou sous d'autres cieux ces fleurs et ces fruits de l'arbre de la science que l'esprit humain a parsemés partout sur la terre comme traces de son origine divine.» C'est dans les heures de loisir arrachées à ces fortes études qu'il acquit sur les monuments des littératures française, anglaise, allemande et italienne cette érudition dont il devait laisser le témoignage écrit.

En 1854, il vint en Europe: il y noua des amitiés illustres, reçut des éloges et quelques encouragements. Le Professeur Stokes présentait de sa part à la Société royale de Londres, dans la séance du 12 juin 1856, une courte note sur la détermination des fonctions inconnues qui rentrent sous le signe d'intégration définie. C'est le résumé rapide d'un mémoire qui avait été soumis le 18 juin 1855 à l'Académie des Sciences de Paris[2] et renvoyé à l'examen de MM. Liouville, Lamé et Bienaymé. La même commission, à laquelle fut adjoint M. Cauchy, eut aussi à juger un mémoire d'analyse mathématique et un opuscule sur le son, présentés le 16 juillet de la même année.[3]

---

[1] Ces pages ont été rédigées sur les quelques documents qui nous ont été gracieusement communiqués par M. le Baron de Jaurú, Ministre du Brésil, à Berlin. D'autre part, M. Edouard Lucas, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, a bien voulu revoir nombre de calculs et combler quelques lacunes.

[2] Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XL, 1310.

[3] Comptes-Rendus, XLI, 100. Ce mémoire d'analyse mathématique n'est pas différent du mémoire sur la théorie du son, dont il fait partie.

Le 9 juin 1856, l'auteur était admis à lire une addition à son premier mémoire[1]; il ne put cependant, malgré ses sollicitations[2], obtenir, avant son départ de France, un rapport sur ses travaux. L'année suivante, il envoyait de Rio de Janeiro une refonte et un extrait de son premier ouvrage[3]: l'extrait fut jugé trop long pour trouver place dans les *Comptes-Rendus*; dès lors il n'y a plus trace de Gomes de Souza dans les publications de l'Académie.

Ces travaux, on les trouvera pour la plupart corrigés et complétés dans la présente publication. L'origine en a été retracée par l'auteur lui-même dans cette page qui est un morceau de haute philosophie: «Aimant par dessus toute autre chose les sciences qui ont pour objet l'étude de la nature, je me suis déterminé à étudier les mathématiques pour mieux les connaître. Mais quand on commence cette étude, on s'arrête à chaque instant devant les difficultés insurmontables qu'offre le calcul intégral. S'il y a pourtant quelque chose vraiment séduisante, c'est l'étude de cette branche d'Analyse. Voulez-vous connaître la théorie de la distribution de la chaleur à la surface des corps conducteurs? Vous vous arrêtez devant les obstacles que vous présente le calcul intégral. Voulez-vous connaître le mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps solides d'une figure quelconque? Voilà encore le calcul intégral qui vous oblige à vous arrêter presque au commencement de la carrière. Voulez-vous connaître la propagation du mouvement à l'intérieur des corps? l'état vibratoire de leurs molécules? la théorie des marées? la figure des planètes qui s'éloignent sensiblement de la forme sphérique? la loi de variation de leurs densités, etc. etc.? Vous rencontrez le calcul intégral devant vous immense, impassible, insurmontable, résistant aux efforts combinés de tous les géomètres distingués de l'Europe dont pas un seul n'a pu s'empêcher de lutter au moins pour quelque temps corps à corps avec lui. Quand on voit toutes ces théories dépendant de ce calcul et ce calcul lui-même réduit à un seul problème, il y a quelque chose qui vous pousse, qui vous entraîne presque malgré vous-même.»

Cet unique et important problème de trouver l'intégrale d'une équation différentielle quelconque fait l'objet du premier mémoire.

Tous les autres, un seul excepté, ne sont que des développements, des éclaircissements ou des applications de ce premier travail, applications qui, dans la pensée de l'auteur, devaient dépasser les limites de ce recueil, puisqu'on n'y rencontre pas par exemple un *Mémoire sur l'état de vibration des corps*, auquel il est renvoyé p. 163 du présent ouvrage. L'avant-dernier opuscule intitulé: *Sur l'analogie entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ordinaires* est un développement des idées que Libri a exposées sur ce sujet dans le journal de Crelle[4] et dans le Journal de Liouville.[5]

On n'attend sans doute pas de l'éditeur une critique en règle de ces travaux. Une compétence éprouvée par de longues recherches de physique mathématique pourrait seule se permettre un jugement et encore devrait-elle apporter à ses appréciations une extrême circonspection. Qui mieux que MM. Liouville et Lamé pouvait formuler sur cet œuvre un avis définitif? Nous laisserons donc au lecteur le soin de juger, nous contentant de quelques observations de forme.

Le style n'est pas sans défauts. Il y a des inversions un peu hardies pour la langue mathématique et après les formules sont bien souvent rejetées des explications qui seraient, pour le lecteur, mieux placées devant l'équation. On peut noter aussi une certaine inexpérience des conventions de langage (par exemple, des *constantes prises à volonté* remplacent partout dans les premières feuilles l'expression consacrée de *constantes arbitraires*), enfin des incorrections philologiques, toutes fautes qui nuisent bien rarement à l'intelligence du texte et qui seront d'ailleurs corrigées pour la plupart dans l'*Errata*.

Ces années 1857—1858 marquent une période singulièrement active de la vie de notre savant. Tout en préparant la publication de ses mémoires scientifiques, il professait à la Faculté de Mathématiques de Rio de Janeiro et siégeait comme député à l'Assemblée générale législative. Ici et là comme ailleurs se distinguant, il prononçait dans le cours des deux sessions parlementaires de remarquables discours sur les questions scientifiques, économiques et législatives. Ces

---

[1] Comptes-Rendus, XLII, 1119.

[2] «M. Gomes de Souza prie l'Académie de vouloir bien hâter le travail de la commission qui a été chargée de l'examen de ses diverses communications concernant des questions d'analyse mathématique. M. de Souza devant prochainement quitter la France et probablement pour n'y plus revenir désire vivement obtenir sur ses travaux un jugement de l'Académie.» (Comptes-Rendus, XLIII, 168.)

[3] Comptes-Rendus, XLIV, 477.

[4] X, 167.

[5] I, 10.

discours ont été imprimés dans les Annales du parlement brésilien; on nous permettra de renvoyer à ce recueil que nous n'avons pu consulter.

C'est également de Rio de Janeiro qu'il faisait paraître, en 1859, à Leipzig[1], sous le titre d'*Anthologie universelle*, une compilation fort originale préparée en Allemagne, lors de son précédent voyage, un « choix des meilleures poésies lyriques de diverses nations dans les langues originales. » Le recueil n'a pas mille pages et cependant dix-sept littératures y sont représentées. La littérature anglaise y occupe la plus large place; puis viennent par ordre d'importance l'Allemagne, la France, l'Italie, le Portugal, l'Espagne, la Pologne, la Russie, la Grèce moderne, la Hongrie et la Serbie, la Suède et la Grèce antique, la Hollande, le Danemarck, la Bohème, enfin la littérature latine. L'idée de choisir la poésie était bonne; la poésie n'est-elle pas de l'âme d'un peuple une incarnation bien autrement vivante que la prose? L'idée de choisir plus particulièrement la poésie lyrique, cette forme la plus élevée de l'inspiration poétique, était excellente. Mais ce cadre excluait quelques poètes célèbres: on doit savoir gré à l'auteur d'avoir fait une exception en faveur de Racine, de Corneille, de Molière, de Caldéron. On pense aussi que le savant brésilien ne pouvait ni comprendre, ni apprécier par lui-même les chefs d'œuvre de tant de langues; il a recouru à de compétentes collaborations et ses choix, qui avaient par là même moins de chances d'être marqués de préférences individuelles, sont assez généralement empreints d'impersonnalité.

Pour l'anthologie française, c'est à l'œuvre de Victor Hugo que l'auteur fait le plus d'emprunts; puis vient Béranger, dont il n'y a pas moins de quatorze chansons entre autres *le roi d'Yvetot*, *les Gueux*, *les Adieux de Marie Stuart*, *le Marquis de Carabas*, *la Bonne Vieille*, *le Dieu des Bonnes Gens*, *les Souvenirs du peuple*, etc.: c'est beaucoup. On trouve ensuite les plus belles fables de La Fontaine, quelques pièces bien choisies de Lamartine, les scènes typiques de Racine, l'*Epitre à Madame Du Châtelet* et *les Systèmes* de Voltaire, quelques fragments de Boileau, les *Tableaux de la Nature* et la *Peinture de Dieu* de Châteaubriand, la *Jeune Captive* et les derniers vers d'André Chénier, *Newton* et *le Chien* de l'abbé Delille, un morceau du Cid, un morceau du Tartufe, la *Châte des feuilles* de Millevoye, *Memmo* de Casimir Delavigne, en somme à côté de vraies perles un peu de clinquant, et parmi des chefs d'œuvre de passion quelques morceaux d'un enthousiasme assez artificiel. Puis, sans vouloir faire ici l'Anthologie des refusés, n'est-il pas permis de déplorer l'absence, à cette fête de famille, du plus proche parent de Dante, Charles Baudelaire?

Goethe, Schiller, Lessing, Klopstock, Tieck, Bürger, Herder, Heine, Uhland, de Platen, Freiligrath, Lenau, Eichendorff, Geibel, Rückert, Chamisso représentent l'Allemagne: la *Chanson de Mignon*, le *Roi de Thulé*, *la Cloche*, *Lénore* et combien d'autres morceaux célèbres dans la littérature universelle, sont bien à leur place pour répondre aux impatiences du lecteur.

La littérature anglaise débute par une riche moisson dans l'œuvre de Byron (*La Fiancée d'Abydos*, *Parisina*, *Manfred*, etc.): puis Thomas Moore, Robert Burns, Goldsmith, Walter Scott, Coleridge, Thomas Campbell, Wordsworth, Robert Southey, Longfellow, Milton, Tennyson, Shakspeare, Gray, Shelley apportent chacun à la contexture de cette délicieuse broderie poétique la caractéristique de leurs génies.

Les fragments universellement classiques du Dante (*Ugolin* et *Françoise de Rimini*) ouvrent la littérature italienne: l'Arioste, le Tasse, Pétrarque, Manzoni, Casti, Parini, Ugo Foscolo, Grossi, Léopardi, Pindemonte, Guarini, Monti, Métastase, Silvio Pellico, Maria Boiardo relient par une chaîne ininterrompue le sentiment moderne aux terribles passions du treizième siècle.

Dans les littératures portugaise et espagnole le choix était plus qu'ailleurs facile et agréable à l'auteur. Nous citerons simplement les noms: Almeida Garrett, Francisco Manuel, Garção, Bocage, Ant. Diniz da Cruz e Silva, Caldas, Gonzaga, A. Gonçalves Dias, J. Bazilio da Gama, Camoens; dans la partie espagnole, entre autres auteurs anonymes, Jorge Montemayor, Espronceda, Lope de Véga, Calderon de la Barca, José Zorrilla.

La Russie est dignement représentée par Pouchkine (*Insouciance de l'Oiseau*), Lermontoff (*la Berceuse*), Lomonosoff, Joukowski (*Chanson du pauvre*), Derjavine (*Dieu*), Batuschkoff, Delwick (*Invocation à la Nuit*), Ivan Koslof.

Nous trouvons dans l'Anthologie polonaise les plus belles ballades d'Adam Mickiewicz, entre autres choses la célèbre *Prière pour la Pologne* de Zaleski, de Slowacki le *Chant de la légion lithuanienne* et de Gaszinski son *Épitre à une mère polonaise.*

[1] Chez F. A. Brockhaus.

On ne saurait trop féliciter l'auteur d'avoir fait une large place aux Chants populaires de la Serbie et de la Grèce Moderne, sans négliger pourtant des poètes comme Const. Rigas, Alexandre Rangabé, les frères Soutzos, Christopoulos etc.

Les chants bohémiens ont dû pour beaucoup être une piquante révélation; il y a particulièrement de Karel Winařický une pièce, l'*Amant de Milina*, d'une simplicité de rhythme inoubliable.

Horace, Ovide, Catulle, Properce, Martial, Tibulle, Théognis, Théocrite, Bion, Moschus, Méléagre, Anacréon et quelques extraits judicieux de l'Anthologie évoquent le monde ancien.

Nous n'irons pas plus avant dans ces arides énumérations; elles suffisent à recommander le recueil comme un livre vraiment utile et original: peut-être nous ont-elles entrainé trop loin; mais il nous semble que si rapetissée qu'elle soit, la personnalité de l'auteur apparaît toujours derrière ces noms et songez de quel prix serait pour les lettrés une anthologie signée de La Fontaine, de Diderot, de Heine ou de Léopardi!

Nous avançons d'ailleurs avec rapidité vers le terme de notre tâche. A la clôture d'une des sessions de la chambre des députés, Gomes de Souza traversait de nouveau l'Atlantique. Il reprenait ses études médicales et fréquentait assidûment à Paris les Cliniques de l'Hôtel-Dieu. Ce n'était plus de l'activité, mais de la fièvre. En 1863, déjà très-malade, il s'embarquait une troisième fois pour l'Europe. Ce fut son dernier voyage; il ne devait plus revoir le pays natal; le 1er juin de cette année, la mort venait le frapper à Londres, au milieu de ses travaux et de ses amis, dans la fleur de l'âge et du talent.

Le présent volume était imprimé environ aux deux-tiers, mais assez imparfaitement. On peut juger par notre *Errata* que la correction des épreuves laisse un peu à désirer: l'épuisement et la vue affaiblie de l'auteur ne lui permettaient pas de faire mieux. Écoutez cette touchante et grandiose déclaration: «Des méthodes générales d'intégration sont trouvées, il est vrai, mais ma santé est détruite et mon organisation épuisée, l'état de mes yeux ne me permettant peut-être plus de me livrer à des recherches où la plus profonde attention et la persévérance la plus assidue sont absolument nécessaires. Mais si je suis forcé à m'arrêter ici et s'il ne m'est pas permis de voir déroulée devant mes yeux la scène où mon imagination s'était tant de fois jetée, j'aurai du moins le plaisir d'avoir ouvert le chemin pour les autres et de savoir qu'il sera permis maintenant à l'homme de lire d'une manière plus profonde dans le sein du Créateur.» Le reste de l'ouvrage demeura en épreuves qui ne laissèrent pas de se détériorer et pour comble d'infortune, le manuscrit se perdit. Le dernier mémoire, celui que nous avons déjà eu l'occasion de citer sur la théorie du son, est publié par nous d'après le manuscrit conservé aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

Gomes de Souza avait aussi en portefeuille un remarquable livre sur les sciences sociales et philosophiques. Malheureusement nous n'avons aucun document sur ce travail, qui était, paraît-il, fort avancé. Il serait bien à désirer que quelque main pieuse en recueillit les fragments et les éclairât de quelque lumière sur la vie intime de l'auteur.

Ces quelques pages que le défaut d'informations ne nous a pas permis de rendre plus nombreuses suffisent peut-être à montrer quel vide la mort de Joaquim Gomes de Souza a creusé dans l'aristocratie du savoir. Géomètre, il s'est attaqué au problème le plus difficile et le plus urgent de la science; mathématicien amoureux de l'expérience et de l'observation, il a goûté les enchantements de l'art; la brutalité du problème social s'est imposée à son cœur et les poignantes complexités du problème philosophique ne l'ont pas laissé indifférent. Enfant prodige, nature idéale, complexe et maladive, il est de cette famille d'intelligences qui semblent avoir été créées pour marquer l'identité fondamentale de toutes les variétés du savoir, de ces âmes enlevées trop tôt à leur œuvre, que la poésie de l'antiquité disait chères aux dieux et qui à travers les distances des siècles et des milieux évoquent la mélancolique figure de Pascal.

Paris (Bibliothèque de la Sorbonne), Septembre 1881.

C. HENRY.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Avant-propos sur l'auteur v
Mémoire sur les méthodes générales d'intégration 1
Addition au mémoire précédent 70
Sur la détermination des constantes qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles en fonction de l'état initial du système 83
Démonstration de quelques théorèmes généraux pour la comparaison de nouvelles fonctions transcendantes . . 87
Mémoire sur la détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.
Premier Extrait 164
Deuxième Extrait 194
Troisième Extrait 200
Quatrième Extrait 203
Cinquième Extrait 205
Sixième Extrait 211
Septième Extrait 216
Sur l'analogie entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ordinaires 228
Mémoire sur le Son 256
Addition au précédent Mémoire 274
Théorème sur les fonctions arbitraires. (Fragment) 276
Errata 278

Mémoire
sur les
méthodes générales d'intégration.

I.

Dans un Mémoire présenté à l'Institut de France, je me suis proposé de déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait aux équations de condition

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(\theta+x)\,d\theta = F(x), \qquad (1) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(\theta x)\,d\theta = F(x), \qquad (2)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)+x f_1(\theta)]\,\varphi(\theta+x)\,d\theta = F(x) \quad (3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)+x f_1(\theta)]\,\varphi(\theta+x)\,d\theta = F(x); \quad (4)$$

où $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ sont des fonctions quelconques de θ; $F(x)$ une fonction aussi quelconque de x; donnée comme les précédentes; α et β des constantes arbitraires et indépendantes par conséquant, de x et de θ. Si l'on prend chacune de ces équations et qu'on les différentie par rapport à d et $\triangle$, et qu'on les intègre par rapport à $\int$ et Σ autant de fois qu'on veut; et si on fait ensuite la somme, membre à membre, des équations qui en résultent, après avoir mis à la place de $f(\theta)$, $f_1(\theta)$, d'autres fonctions quelconques de θ, indépendantes les unes des autres, et aussi d'autres constantes α_1, β_1, α_2, β_2, etc. à la place des constantes α, β, on aura encore des équations dont les solutions se trouvent dans le même Mémoire.

Si on fait attention à ce que les seuls problèmes de ce genre qui aient été résolus, sont

$$\int_0^{\infty} \theta^{\mu-1}\,\varphi(\theta+x)\,d\theta = F(x), \qquad (5) \qquad \int_0^1 (1-\theta)^f \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right) d\theta = F(x),$$

traités par Abel et M. Liouville*, et que dans ces intégrales non seulement les limites sont déterminées, mais aussi que la fonction inconnue $\varphi(x)$ ne se trouve multipliée que par $\theta^{\mu-1}$ ou $(1-\theta)^f$, c'est-à-dire par les fonctions les plus simples qu'offre l'Analyse, on conviendra, ce me semble, que dans ce genre de questions, mon Mémoire est allé bien au-delà de ce qu'on savait auparavant.

Dans ce Mémoire je me propose d'aller bien plus loin, car je vais donner la solution de l'équation très-générale

* Dans le «*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*» on trouve un article du professeur George Boole de Lincoln renfermant quelques observations sur la transformation des différentielles à indices fractionnaires ou des intégrales définies, ou sur les solutions que M. Liouville a données de l'équation (5); mais on n'y rencontre aucun nouveau cas du problème dont il est ici question.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\ \varphi(x+\theta)\ d\theta = F(x);$$

où $f(x, \theta)$ est une fonction quelconque de x et θ, $F(x)$ une fonction de x, α et de β des constantes ou même des fonctions quelconques de x. Mais si les méthodes dont j'ai fait usage dans le Mémoire cité sont tout-à-fait rigoureuses, on ne peut pas en dire de même de toutes celles dont nous allons faire usage ici, puisque je me sers de certains développements en séries, dont la convergence n'est pas démontrée, et dont l'emploi, par conséquent, d'après quelques géomètres, n'est pas très-légitime. Mais si nous passons par dessus ces difficultés qui n'existaient pas il y a seulement quelques années, et qui n'existent pas même aujourd'hui pour plusieurs géomètres, tous ou presque tous faisant usage de suites dont la convergence n'est pas prouvée ou ne pent pas être démontrée (comme, par exemple, dans l'intégration des équations aux différentielles partielles, où on commence par trouver une suite procédant suivant les dérivées successives d'une fonction arbitraire, suite dont la convergence, par conséquent, ne peut pas être démontrée, et qu'on réduit après sous forme finie au moyen d'intégrales définies, et dont on cherche ensuite les fonctions génératrices): si nous passons, dis-je, par dessus ces difficultés, on verra que nous avons résolu le fameux problème dont la solution a été inutilement cherchée depuis deux cents années. En effet, de l'équation ci-dessus dépend l'intégration de l'équation générale linéaire d'un ordre quelconque n et dont les coefficients sont des fonctions quelconques de la variable indépendante, et, par conséquent, le calcul intégral tout entier.

Je dois encore ajouter qu'après avoir déduit de l'équation (7) plusieurs solutions fondées sur des dévéloppements en séries, je suis venu à bout de la résoudre, en mettant tout-à-fait les suites de côté, ne m'appuyant que sur des intégrales définies, et, par conséquent, donnant à la solution toute la rigueur désirable. Je commencerai pourtant par exposer les méthodes fondées sur des suites, non seulement parceque je regarde les séries comme un excellent et très-puissant moyen d'exploration, mais aussi parce que, en résolvant d'une manière rigoureuse le problème auquel nous les appliquons tant qu'elles sont convergentes, elles nous indiquent presque toujours comment résoudre le même problème dans d'autres cas, je les emploierai encore parceque, quand il s'agit de questions aussi importantes que celles dont nous nous occupons ici, il est très-utile de faire usage de plusieurs méthodes et de faire voir ensuite qu'elles s'accordent dans leurs résultats.

Quand on donne la solution d'un probleme général au moyen d'intégrales définies, il peut arriver quelquefois, que cette solution devienne illusoire, quand, pour quelques valeurs particulières d'une fonction donnée $f(x)$, qui entre sous le signe d'intégration, l'intégrale devient indéterminée. Or, si on a alors une autre solution en série, cette solution sera suffisante pour lever l'indétermination de l'autre.

II.

On sait, depuis longtemps, qu'il y a des fonctions qui peuvent être données ou représentées par une somme de fonctions semblables entre elles et eifférentes de la première. Ainsi la fonction exponentielle e^x, est comme on sait égale à

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

ou à

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(4) + \text{etc.},$$

si on fait, pour abréger,

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = f(n),$$

est équivalente à la somme de fonctions semblables qu'on obtient donnant à l'indice n qui entre dans la fonction $f(n)$ la série des nombres naturels. Ainsi quoique les deux fonctions e^x, $f(n)$ soient très-différentes l'une de l'autre, pourtant un certain nombre de fonctions semblables à la seconde est capable de reproduire la première.

La même chose a lieu avec une foule d'autres fonctions, comme on le voit, par exemple, dans les équations

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.},$$

$$\sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

$$\text{tang}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.},$$

$$e^{x\cos\theta}\cos(x\cos\theta) = 1 + x\cos\theta + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\cos 2\theta + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos 3\theta + \text{etc.},$$

etc. etc. etc.

où les fonctions

$$\log(1+x), \quad \sin^{-1}x, \quad \text{tang}^{-1}x, \quad e^{x\cos\theta}\cos(\theta\cos\theta), \quad \text{etc.}$$

sont formées par des sommes de fonctions respectivement semblables à

$$\frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \frac{x^n}{n}\cos\left(\frac{3+n}{4}\right)2\pi, \quad \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}\cos n\theta, \text{ etc.}$$

Au lieu de nous arrêter à des fonctions particulières, nous pouvons prendre la formule générale

$$f(x) = f(o) + f'(o)\frac{x}{1} + f''(o)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

qui nous montre qu'une fonction quelconque $f(x)$ peut être formée par une somme de fonctions semblables à la fonction à indice variable

$$f^{(n)}(o)\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n},$$

quand on donne à cet indice pour valeur la suite des nombres naturels.

Nous avons également

$$f(y) = f(a) + [\Phi(a)f'(a)]\frac{x}{1} + \frac{d[\Phi^2(a)f'(a)]}{da}\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}, \tag{8}$$

où f, Φ sont des caractéristiques de fonctions quelconques, et les variables x, y sont liées l'une à l'autre par l'équation

$$y = a + x\,\Phi(y). \tag{9}$$

Cette équation, à cause de Φ, qui est une fonction quelconque à volonté, peut représenter une fonction implicite quelconque de x. Et de ces deux théorèmes, il résulte qu'une fonction quelconque, im-

plicite ou explicite peut être formée par une somme de certaines fonctions semblables entre elles, mais différentes de la première.

On doit même remarquer que cela peut être fait d'une infinité de manières différentes. En effet, en vertu du théorème de M. MURPHEY

$$f(x) = f(x-h) + \frac{(2h)^1}{1\cdot 2} f'(x-2h) + \frac{(3h)^2}{1\cdot 2\cdot 3} f''(x-3h) + \text{etc.} \tag{10}$$

la fonction $f(x)$ est donnée par une somme de fonctions semblables à

$$\frac{(nh)^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n-1)}(x-nh). \tag{11}$$

La même fonction est encore donnée par une somme de fonctions semblables à

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{f'(x)\,(x-a)^n}{[\Phi(x)]^n}\right]_{x=a} \frac{[\Phi(x)]^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} \tag{12}$$

en rapport au théorème connu

$$f(x) = f(a) + \left[\frac{f'(x)\,(x-a)}{\Phi(x)}\right] \frac{\Phi(x)}{1} + \frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)\,(x-a)^2}{\Phi(x)^2}\right] \cdot \frac{\Phi(x)^2}{1\cdot 2} + \\ + \frac{d^2}{dx^2} \cdot \left[\frac{f'(x)\,(x-a)^3}{\Phi(x)^3}\right] \frac{\Phi(x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.} \tag{13}$$

dû à BURMANN.

Comme dans ce théorème $\Phi(x)$ est une fonction quelconque de x, satisfaisant à peine à la condition de s'évanouir pour $x = o$, il en résulte que la fonction (12) aura une infinité de formes différentes, et que, par conséquent, il est possible de former d'une infinité de manières différentes une fonction quelconque donnée par une somme de fonctions semblables entre elles, mais différentes de la première.

III.

Ces considérations nous portent tout naturellement à la question suivante: une fonction quelconque $f(x)$ étant donnée, combien de formes peut-on donner à la fonction $\psi(x, n)$ à indice variable n, pour que la somme

$$\psi(x, 0) + \psi(x, 1) + \psi(x, 2) + \text{etc.} \tag{14}$$

puisse reproduire la première? Ou bien à celle-ci, qui est déterminée: peut-on donner la forme de la fonction $\psi(x, n)$ par rapport à x, et après déterminer sa forme par rapport à n pour qu'une somme d'une telle fonction soit capable de reproduire la première? Ou, encore plus simplement, faisant $\psi(x, n) = \Phi(n)\, F(x, n)$, et posant après

$$f(x) = \Phi(0)\, F(x, 0) + \Phi(1)\, F(x, 1) + \Phi(2)\, F(x, 2) + \text{etc.}, \tag{15}$$

$F(x, n)$ étant une fonction donnée à volonté, est-il possible, en déterminant $\Phi(n)$ convenablement, de satisfaire à cette équation?

Je remarque qu'ayant un nombre quelconque de constantes

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \text{etc.}, \tag{16}$$

il est toujours possible d'imaginer une fonction $\tilde{\omega}(x)$ telle qu'on ait

$$\tilde{\omega}(0) = a_0, \quad \tilde{\omega}'(0) = a_1, \quad \tilde{\omega}''(0) = a_2, \quad \tilde{\omega}'''(0) = a_3, \quad \text{etc.}; \tag{17}$$

quoiqu'on ne puisse pas toujours la déterminer effectivement.

Quand le nombre des constantes est fini, il n'y a pas la moindre difficulté, puisqu'on n'a qu'à prendre

$$\tilde{\omega}(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots a_n \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n}, \tag{18}$$

si elles sont en nombre $n+1$.

Si le nombre des constantes est infini on prendra pour $\tilde{\omega}(x)$ la suite

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + a_3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}; \tag{19}$$

ou, plutôt, la fonction qui, par son développement, est capable de la produire; et quoiqu'on ne puisse pas toujours arriver à la déterminer, il n'est pas pourtant moins vrai qu'on peut toujours concevoir son existence. Or en y faisant $x = 0$ ainsi que dans ses dérivées successives on aura

$$\tilde{\omega}(0) = a_0, \quad \tilde{\omega}'(0) = a_1, \quad \tilde{\omega}''(0) = a_2, \quad \text{etc.},$$

comme il s'agissait de le prouver.

L'équation (15) prendra alors la forme

$$f(x) = \tilde{\omega}(0) F(x, 0) + \tilde{\omega}'(0) F(x, 1) + \tilde{\omega}''(0) F(x, 2) + \text{etc.}; \tag{20}$$

ou, ce qui vaut mieux,

$$f(x) = \tilde{\omega}(0) F(x, 0) + \frac{1}{1} \tilde{\omega}'(0) F(x, 1) + \frac{1}{1 \cdot 2} \tilde{\omega}''(0) F(x, 2) + \text{etc.} \tag{21}$$

Nous pourrions avoir posé tout d'abord ces deux égalités; car comme il s'agit tout simplement de faire voir que l'équation (15) peut toujours subsister en disposant des constantes $\Phi(0)$, $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, etc., il est clair qu'on peut leur donner la forme qui nous conviendra le plus.

Je remarque maintenant que si on peut poser l'égalité (15), où $F(x, n)$ est une fonction de x et n, prise à volonté, on pourra également démontrer l'équation

$$f(x) = H_1 F(x, a_1) + H_2 F(x, a_2) + H_3 F(x, a_3) + \text{etc.}, \tag{22}$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque donnée de x; $F(x, a_n)$ une fonction, aussi donnée, de la variable x et d'une racine quelconque a_n d'une certaine équation

$$F_1(x) = 0,$$

prise à volonté; H_n une constante, fonction de a_n, à déterminer.

En effet, d'après ce que nous avons dit un peu plus haut, il est toujours possible d'imaginer une certaine fonction $\tilde{\omega}(x)$, telle qu'on ait

$$\tilde{\omega}'(0 = a_1, \quad \tilde{\omega}''(0) = a_2, \quad \tilde{\omega}'''(0) = a_3, \quad \text{etc.}$$

cette fonction réduira l'équation (22) à

$$f(x) = H_1 F[x, \tilde{\omega}'(0)] + H_2 F[x, \tilde{\omega}''(0)] + H_3 F[x, \tilde{\omega}'''(0)] + \text{etc.} \tag{23}$$

mais comme $\tilde{\omega}^{(n)}(0)$ est une fonction de n, il en résulte que

$$F[x, \tilde{\omega}^{(n)}(0)]$$

est aussi une certaine fonction de x et n. L'équation (23) entre alors dans l'équation (15); et, par

conséquent, si on peut poser cette dernière égalité, il sera toujours possible de prouver l'équation (22).

On peut aussi renverser l'ordre de ces suppositions, et démontrer que l'exactitude de l'égalité (22) entraîne celle de l'équation (15).

IV.

Je remarquerai ici que, ayant l'intégrale définie

$$\int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega, \tag{24}$$

où a, b, h désignent trois constantes, réelles ou imaginaires, finies ou infinies, $F_1(\omega)$ une fonction de α, on peut toujours lui faire reproduire telle fonction $F(x)$ qu'on voudra, en disposant convenablement de ces quatre quantités: ou, autrement, il est toujours permis de poser

$$F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega. \tag{25}$$

En effet, si on pose

$$a = -\infty, \quad b = +\infty, \quad h = \sqrt{-1}, \quad F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega\alpha\sqrt{-1}} F(\alpha)\, d\alpha, \tag{26}$$

l'équation précédente deviendra

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega(\alpha-x)\sqrt{-1}} F(\alpha)\, d\alpha\, d\alpha; \tag{27}$$

c'est-à-dire identique, puisque nous retombons dans la formule de Fourier.

V.

Cela posé, faisons $F(x,n) = e^{nx} F_1(x,n)$, et posons

$$F_1(x,n) = \int_\alpha^\beta e^{n\theta}\, {}_1F(x,\theta)\, d\theta;$$

α, β et ${}_1F(x,\theta)$ étant des quantités qu'on peut et qu'on sait déterminer. L'équation (21) prendra la forme

$$f(x) = \int_\alpha^\beta {}_1F(x,\theta)\left[\tilde{\omega}(0) + \tilde{\omega}'(0)\frac{e^{\theta+x}}{1} + \tilde{\omega}''(0)\frac{e^{2(x+\theta)}}{1\cdot 2} + \text{etc.}\right] d\theta;$$

ou, plus simplement,

$$f(x) = \int_\alpha^\beta {}_1F(x,\theta)\, \tilde{\omega}(e^{\theta+x})\, d\theta;$$

que la supposition $\tilde{\omega}(e^x) = \psi(x)$ réduit à la forme

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} {}_1F(x, \theta)\ \psi(x+\theta)\, d\theta ; \tag{28}$$

Or, d'après mes connaissances actuelles d'Analyse, je pense que personne ne doutera de ce que l'équation (26), ou bien

$$f(x) = f_1(x, 0)\,\psi(x) + f_1(x, 1)\,\frac{d\psi(x)}{dx} + f_1(x, 2)\,\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \text{etc.} \tag{29}$$

(qui se déduit de la précédente, développant $\psi(x+\theta)$ par le théorème de TAYLOR) où on a fait, pour abréger,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\int_{\alpha}^{\beta} \theta^n\, {}_1F(x, \theta)\, d\theta = f_1(x, n), \tag{30}$$

soit susceptible d'une solution; et, par conséquent, l'équation (15) dont la possibilité est basée sur elle, en aura une aussi.

C'est ce qu'il s'agissait de prouver.

Nous reviendrons encore sur la possibilité de cette équation; mais pour le moment occupons-nous du problème suivant.

VI.

Problème. Quelle est la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x), \tag{31}$$

où $f(x, \theta)$ est une fonction quelconque de x et θ; $F(x)$, α et β des fonctions quelconques de x?

Nous commencerons par supposer premièrement que α et β soient des constants afin de rendre les calculs un peu plus simples, mais on pourra facilement voir que nos méthodes s'appliquent mot à mot au cas où ces quantités sont des fonctions de x.

Développons $\varphi(x+\theta)$ en série par le théorème de TAYLOR; on a

$$x\,\varphi(X) + X_1\frac{d\varphi(x)}{dx} + X_2\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} = F(x), \tag{32}$$

si on fait pour abréger

$$\frac{1}{1\cdot 2\ldots . n}\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\,\theta^n d\theta = x_n = {}_1f(x, n) \tag{33}$$

Faisons encore

$$F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)} \tag{34}$$

$F_2(x)$ étant une fonction telle que l'équation $F_2(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x; $F_1(x)$ telle, par conséquent, que les équations

$$F(x) = \infty, \qquad \frac{1}{F_1(x)} = \infty, \tag{35}$$

aient les mêmes racines

Désignons par a_1, a_2, a_3 etc. les différentes racines, supposées inégales et en nombre infini, de l'équation

$$F_1(x) = 0 : \tag{36}$$

la fonction $F_1(x)$ pourra s'écrire comme suit :

$$F_1(x) = {}_1F(x)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\left(1 - \frac{x}{a_3}\right)\ldots\ldots \tag{37}$$

${}_1F(x)$ étant une fonction telle que l'équation ${}_1F(x) = o$ ne puisse jamais avoir lieu : mais alors on pourra comprendre cette expression dans la fonction $F_2(x)$ et prendre tout simplement pour $F_1(x)$ la fonction

$$F_1(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\left(1 - \frac{x}{a_3}\right)\ldots\ldots \tag{38}$$

Ces calculs supposent que la fonction $F(x)$ soit telle que les produits

$$\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)F(x) \qquad \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)F(x) \qquad \left(1 - \frac{x}{a_3}\right)F(x) \qquad \text{etc.} \tag{39}$$

restent finis quand on fait $x = a_1$ dans le premier ; $x = a_2$ dans le second ; $x = a_3$ dans le troisième ; et ainsi de suite.

Cela posé, il est permis d'établir l'égalité

$$\frac{F_2(x)}{F_1(x)} = B_1\frac{f_1(x)}{x - a_1} + B_2\frac{f_2(x)}{x - a_2} + B_3\frac{f_3(x)}{x - a_3} + \text{etc.} \tag{40}$$

où B_1, B_2, B_3, etc. sont des constantes à déterminer ; $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, etc. des fonctions quelconques de x, prises à volonté, mais telles pourtant que les équations

$$f_1(a_1) = 0, \qquad f_2(a_2) = 0, \qquad f_3(a_3) = 0, \qquad \text{etc.} \tag{41}$$

ne puissent jamais avoir lieu.

En vertu de ce que nous avons montré dans les N^{os} III, IV et V il est toujours permis de poser cette équation, où on déterminera facilement les constantes B_1, B_2, B_3, etc. faisant successivement $x = a_1$, a_2, a_3, etc.

On trouvera

$$B_1 = \frac{F_2(a_1)}{f_1(a_1)F_1'(a_1)}, \quad B_2 = \frac{F_2(a_2)}{f_2(a_2)F_1'(a_2)}, \quad B_3 = \frac{F_2(a_3)}{f_3(a_3)F_1'(a_3)}, \quad \text{etc.} \tag{42}$$

Représentons maintenant l'intégrale de l'équation proposée (32) par

$$\varphi(x) = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + A_3 e^{m_3 x} + \text{etc.} \tag{43}$$

A_1, A_2, A_3, et m_1, m_2, m_3, etc. étant des constants à déterminer.

Cette série a, comme on sait, toute la généralité désirable pour représenter une fonction quelconque. Du reste la méthode que nous suivons n'exige pas qu'on démontre cette proposition, puisque nous ne cherchons qu'une valeur particulière satisfaisant à l'équation et non son intégrale générale.

Mettons la valeur précédente de $\varphi(x)$ dans cette équation ; on a

$$\left.\begin{array}{l} e^{m_1 x}[x + m_1 X_1 + m_1^2 X_2 + \text{etc.}]A_1 \\ + e^{m_2 x}[x + m_2 X_1 + m_2^2 X_2 + \text{etc.}]A_2 \\ + e^{m_3 x}[x + m_3 X_1 + m_3^2 X_2 + \text{etc.}]A_3 \\ + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{array}\right\} = B^2\frac{f_1(x)}{x - a_1} + B_2\frac{f_2(x)}{x - a_2} + B_3\frac{f_3(x)}{x - a_3} + \text{etc.} \tag{44}$$

On satisfait à cette équation en posant premièrement

$$e^{m_n x}\,[x + x_n\, n_1 + x_n^2\, n_2 + \text{etc.}] = \frac{fn\,(x)}{x - a_n} \tag{45}$$

et après

$$An = Bn \tag{46}$$

L'équation (45) devant être identique, il faut que ses deux membres soient égaux pour les mêmes valeurs de x; et comme le second membre devient infini pour $x = a_n$ il faut que la même chose ait lieu pour le premier. On satisfait à cette condition en déterminant m_n par l'équation.

$$\frac{1}{X + m_n X_1 + m_n^2 X_2 + \text{etc.}} = 0, \tag{47}$$

ou

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{m_n \theta} f(a_n, \theta)\, d\theta} = 0, \tag{48}$$

faisant attention à l'équation (33).

Cette équation détermine m_n en fonction de a_n; et l'équation (41) restera identique si on détermine $f_n(x)$, qui jusqu'ici n'avait reçu aucune valeur particulière, par

$$f_n(x) = (x - a_n)\, e^{x\Phi(a_n)} \int_\alpha^\beta e^{\theta\Phi(a_n)} f(x, \theta)\, d\theta, \tag{49}$$

$\Phi(a_n)$ étant une racine de l'équation (48). Si on avait $f_n(x)$, l'équations (42) donnerai B_1, B_2, B_3, etc., et l'équation (45) A_1, A_2, A_3, etc.

De cette manière toutes les quantités qui entrent dans l'équation (43) se trouvent déterminées, et la valeur de l'inconnue étant donnée par une série dont le terme général est connu, la question doit être regardée comme complètement résolue, puisqu'on peut toujours trouver la fonction qui, par son développement, est capable de la reproduire.

On peut donc énoncer le théorème suivant.

VII.

Théorème I. Si on a l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(x, \theta)\, \varphi(x + \theta)\, d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)} \tag{50}$$

où $f(x, 0)$ est une fonction quelconque de x et θ; $F(x)$ une fonction quelconque de x; n'ayant qu'une seule valeur pour chaque valeur de x; $F_2(x)$ une fonction telle que l'équation $F_2(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x; $F_1(x)$ une fonction telle que les équations

$$F(x) = \infty, \qquad \frac{1}{F_1(x)} = \infty, \tag{51}$$

aient les mêmes racines; la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait est donnée par

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{{}^1f(a_1)\, F_1'(a_1)}\, e^{x\Phi(a_1)} + \frac{F_2(a_2)}{{}^1f(a_2)\, F_1'(a_2)}\, e^{x\Phi(a_2)} + \text{etc.} \tag{52}$$

${}^1f(x)$ étant déterminés par

$$^1f(x) = (x-a_r)\,e^{x\Phi(a_r)}\int_\alpha^\beta e^{\theta\Phi(a_r)} f(x,\theta)\,d\theta\,; \tag{53}$$

$\Phi(a_n)$ étant une racine, par multiple de l'équation

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{\theta\Phi(a_n)} f(a_n,\theta)\,d\theta} = o\,; \tag{54}$$

a_1, a_2, a_3, etc. les racines de l'équation

$$F_1(x) = o. \tag{55}$$

Dans la solution que nous avons donnée dans le N° précédent de l'équation (32), nous avons supposé que l'équation (48) n'a que des racines inégales: mais il est bien clair, d'après ces calculs mêmes, que la même solution subsiste quand quelques unes des racines deviennent égales; mais alors, il faut que, en désignant par m un nombre entier positif, convenablement choisi, le produit

$$(x-a_n)^n F(x) \tag{56}$$

pour $x = a_n$, devienne fini. C'est pour cela, qu'énonçant le théorème ci-dessus nous avons dit que la fonction $F(x)$ doit satisfaire à la condition de n'avoir qu'une seule valeur pour des valeurs finies de x. Si cette fonction renfermait un facteur de la forme

$$\frac{1}{(x-a_n)^{\frac{f}{q}}} \tag{54}$$

il serait impossible que le produit (57), pour $x = a_n$, conservât une valeur finie.

Nous devons observer que la solution que nous avons donnée de l'équation (7), dans la supposition d'être les limites α et β constantes, peut être étendue très-facilement au cas où ces quantités deviennent fonctions de x. On n'a pour cela qu'à faire $x = a_r$ dans les limites de l'intégrale qui entre dans l'équation (48), qu'on résoudra par rapport à $\Phi(a_n)$, comme dans le cas précédent; et prendra après pour $\varphi(x)$ l'expression donnée par l'équation (52), après qu'on y aura mis la valeur précédente de $\Phi(a_n)$ ainsi que celle qui en résultera pour $^1f(x)$.

VIII.

Avant d'aller plus loin donnons un exemple.

Supposons qu'on ait

$$f(x,\theta) = [f(x)]^\theta, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \infty,$$

l'équation (7) se reduira à

$$\int_0^\infty [f(x)]^\theta \varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)},$$

et l'équation (48) se réduisant aussi à

$$\frac{1}{\int_0^\infty e^{m_n\theta}[f(a_r)]^\theta\,d\theta} = \frac{1}{\int_0^\infty e^{[m_r+\log. f(a_r)]\theta}\,d\theta} = -[m_n + \text{l. f}(a_r)] = 0,$$

on en déduit

$$m_r = -1.f(a_r).$$

La valeur de ${}^1f(x)$, déduite de l'équation (49) est alors

$${}^1f(x) = (x-a_n)[f(a_r)]^{-x}\int\left[\frac{f(x)}{f(a_n)}\right]^{\theta}d\theta,$$

ou

$$\frac{(x-a_r)}{[\log.f(a_r)-\log f(x)][f(a_r)]^x}$$

si on suppose dans ces équations qu'on ait $x < a_r$. Cette expression de ${}^1f(x)$, malgré sa forme indéterminée, a pour valeur

$$\frac{-1}{f'(a_r)[f(a_r)]^{a_r-1}}$$

La valeur de $\varphi(x)$ sera

$$-\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{F_1'(a_1)f'(a_1)}[f(a_1)]^{a_1-x+1} + \frac{F_2(a_2)}{F_1'(a_2)f'(a_2)}[f(a_2)]^{a_1-x+1} + \text{etc.}$$

IX.

Nous devons maintenant entrer dans quelques développements sur la sommation des séries afin qu'on puisse mettre la valeur trouvée de $\varphi(x)$ sous forme finie.

Pour cela, je remarquerai que les suites

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \text{etc.} \qquad (58)$$

$$f(0) + \frac{1}{1}f(1) + \frac{1}{1\cdot 2}f(2) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f(3) + \text{etc.} \qquad (59)$$

peuvent toujours se mettre sous forme finie quelque soit la fonction $f(n)$; car, au moyen de la formule de FOURIER

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\beta(x-\alpha)\sqrt{-1}}f(\alpha)\,d\beta\,d\alpha,$$

on peut les écrire comme suit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\alpha\sqrt{-1}}f(\alpha)[1+e^{\beta\sqrt{-1}}+e^{2\beta\sqrt{-1}}+e^{3\beta\sqrt{-1}}+\text{etc.}]\,d\alpha\,d\beta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\alpha\sqrt{-1}}f(\alpha)\left[1+\frac{1}{1}e^{\beta\sqrt{-1}}+\frac{1}{1\cdot 2}e^{2\beta\sqrt{-1}}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}e^{3\beta\sqrt{-1}}+\text{etc.}\right]d\alpha\,d\beta$$

et, par conséquent, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\beta\alpha\sqrt{-1}}f(\alpha)}{1-e^{\beta\sqrt{-1}}}d\alpha\,d\beta, \qquad (60) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\alpha\sqrt{-1}}e^{e^{\beta\sqrt{-1}}}f(\alpha)\,d\alpha\,d\beta, \qquad (61)$$

Non-seulement on peut sommer les séries (58) (59) au moyen de deux intégrales définies, comme on vient de le voir, et on l'avait déjà remarqué auparavant; mais on peut y arriver très souvent,

à l'aide d'une seule intégrale définie: mais pour cela il faut premièrement construire quelques formules préliminaires.

X.

Prenons la fonction générale $f(x)$ et supposons qu'on puisse la développer en une série d'exponentielle, comme suit:

$$f(x) = A_1 e^{-m_1 x} + A_2 e^{-m_2 x} + A_3 e^{-m_3 x} + \text{etc.} \tag{62}$$

Mettons y successivement $\theta\sqrt{-1}$, $-\theta\sqrt{-1}$ à la place de r; sommons et soustrayons, membre à membre, les équations qui en résulteront; on aura

$$\frac{f(-\theta\sqrt{-1}) + f(\theta\sqrt{-})}{2} = A_1 \cos. m_1\theta + A_2 \cos. m_2\theta + \text{etc.}$$

$$\frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = A_1 \sin. m_1\theta + A_2 \sin. m_2\theta + \text{etc.}$$

Multiplions les équations précédentes respectivement par

$$\frac{x\,d\theta}{\theta^2 + x^2} \qquad \frac{\theta\,d\theta}{\theta^2 + x^2}$$

et intégrons entre les limites o et ∞; on aura

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + \theta^2} \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) + f(\theta\sqrt{-1}}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left[A_1 e^{-m_1 x} + A_2 e^{-m_1 x} + \text{etc.}\right] \tag{63}$$

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left[A_1 e^{-m_1 x} + A_2 e^{-m_2 x} + \text{etc.}\right] \tag{64}$$

en égard aux formules connues

$$\int_0^\infty \frac{m x \cos. \omega\,d\omega}{(m x)^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2} e^{-mx} \qquad \int_0^\infty \frac{\omega \sin. \omega\,d\omega}{(m x)^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2} e^{-mx}.$$

Rapprochant les équations précédentes de l'égalité (62), il est clair qu'on aura

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + \theta^2} \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) + f(\theta\sqrt{-1})}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2} f(x) \tag{65}$$

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,d\theta = \frac{\pi}{2} f(x). \tag{66}$$

Dans cette démonstration on a supposé que les constantes m_1, m_2, m_3, etc. soient réelles et positives ou bien imaginaires et de la forme $p \pm q\sqrt{-1}$, p et q étant des quantités réelles et positives. La fonction $f(x)$ n'est donc quelconque, mais doit satisfaire à la condition de s'évanouir pour $x = \infty$.

Dans l'usage qu'on fera pour la suite des formules précédentes, il faut se rappeller toujours de cette restriction que nous venons de faire, pour que nous n'ayons pas besoin de le répéter sans cesse.

XI.

De quelques formules qui se trouvent dans les Exercices du Calcul intégral de LEGENDRE, t. II p. 169 il est facile de déduire les formules

$$\frac{2}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{1}{\pi x} - \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2+x^2} - \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \text{etc.}\right), \tag{67}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x} - e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x} + e^{-\frac{1}{2}\pi x}} = \frac{4x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2+x^2} - \frac{1}{3^2+x^2} + \frac{1}{5^2+x^2} \text{ etc.}\right), \tag{68}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi x} + e^{-\frac{1}{2}\pi x}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2+x^2} - \frac{3}{3^2+x^2} + \frac{5}{5^2+x^2} \text{ etc.}\right). \tag{69}$$

Combinant la première de ces équations avec l'égalité connue

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \text{etc.} = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{\pi}{2\theta} + \frac{\pi}{\theta(e^{2\pi\theta}-1)}, \tag{70}$$

on a encore celle-ci

$$\frac{\pi}{4x}\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x} + e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{e^{\frac{1}{2}\pi x} - e^{-\frac{1}{2}\pi x}} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{4^2+x^2} + \frac{1}{6^2+x^2} + \text{etc.} \tag{71}$$

XII.

Prenons maintenant la série

$$f(1) + f(2) + f(3) + \text{etc.}$$

et mettons y, au lieu de $f(n)$ sa valeur donnée en intégrale définie, au moyen de la formule (66); on aura

$$\int_0^\infty \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{\pi\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{1^2+\theta^2} + \frac{1}{2^2+\theta^2} + \frac{1}{3^2+\theta^2} + \text{etc.}\right]d\theta,$$

éliminant la série qui se trouve dans la parenthèse au moyen de l'équation (70), on trouve

$$f(1) + f(2) + f(3) + \text{etc.} = \int_0^\infty \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{\pi\sqrt{-1}}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\theta} + \frac{\pi}{e^{2\pi\theta}-1}\right]d\theta. \tag{72}$$

En s'appuyant sur les formules (65), (66) et sur les égalités (67), (68), (69), (71) on arrive, procédant comme précédemment aux nouvelles formules sommatoires

$$f(1) - f(2) + f(3) - \text{etc.} = \int_0^\infty \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{\pi\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{2\theta} - \frac{2\pi}{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}\right]d\theta, \tag{73}$$

$$f(1) - f(3) + f(5) - \text{etc.} = \int_0^\infty \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{4\sqrt{-1}}\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\theta} - e^{-\frac{1}{2}\pi\theta}}{e^{\frac{1}{2}\pi\theta} - e^{-\frac{1}{2}\pi\theta}}d\theta, \tag{74}$$

$$f(1) - f(3) + f(5) - \text{etc.} = \int_0^\infty \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) + f(\theta\sqrt{-1})}{2} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi\theta} + e^{-\frac{1}{2}\pi\theta}} d\theta, \tag{75}$$

$$f(2) + f(4) + f(6) + \text{etc.} = \int_0^\infty \frac{f(-\theta\sqrt{-1}) - f(\theta\sqrt{-1})}{\pi\sqrt{-1}} \left[\frac{\pi}{4} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\theta} + e^{-\frac{1}{2}\pi\theta}}{e^{\frac{1}{2}\pi\theta} + e^{-\frac{1}{2}\pi\theta}} - \frac{1}{2\theta} \right] d\theta. \tag{76}$$

XIII.

Les différents termes des séries que nous venons de sommer sont des fonctions respectives des différents nombres qui forment la suite des nombres naturels. Il y a d'autres séries, dont l'importance est peut-être plus grande, surtout pour le but que nous nous proposons, ce sont les suites dont les termes sont des fonctions des différentes racines d'une équation quelconque donnée. Disons quelque chose sur la manière de les sommer.

Pour cela, nous avons besoin de nous rappeler quelques propositions, dont l'une nous sera dans la suite de ce Mémoire d'une très-grande importance.

Désignons par a_1, a_2, a_3, etc. les différentes racines de l'équation

$$F(x) = 0; \tag{77}$$

par n un nombre entier positif; par ε une quantité infiniment petite, qu'on doit supposer nulle après les différentiations, on aura, d'après Mr. Cauchy:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \text{etc.} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \frac{d^n . l\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^n}, \tag{78}$$

$$\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \frac{1}{a_3^n} + \text{etc.} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \frac{d^n . l\, F(\varepsilon)}{d\varepsilon^n}; \tag{79}$$

où a est égal à la valeur que prend le produit

$$\frac{\frac{1}{z} F'\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} \tag{80}$$

quand on y fait $z = 0$.

La première de ces formules suppose: 1° que $F(z)$ ainsi que sa dérivée $F'(z)$ ait une seule valeur pour chaque valeur de z; 2° que $F'(z)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires, de la variable z; 3° que la fonction (80) obtienne, pour une valeur nulle de z; une valeur finie a.

La formule (79) suppose aussi: 1° que $F(z)$ ainsi que sa dérivée ait une seule valeur pour chaque valeur de z; 2° que $F'(z)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires, de la variable z; 3° que la fonction

$$\frac{F'(z)}{z^n F(z)} \tag{81}$$

s'evanouisse, pour des valeurs infinies, réelles ou imaginaires, de la variable z.

XIV.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de x; telle qu'on ait

$$\varphi(x) = A_1 e^{-m_1 x} + A_2 e^{-m_2 x} + \text{etc.}, \tag{82}$$

A_1, A_2, etc. étant des fonctions respectives de m_1, m_2, etc., ces dernières quantités étant elles-mêmes des constantes de la forme $p + q\sqrt{-1}$; ce qui suppose qu'on ait $\varphi(\infty) = 0$. Différentions n fois de suite cette expression; on aura

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n [A_1 m_1^n e^{-m_1 x} + A_2 m_2^n e^{-m_2 x} + \text{etc.}] \tag{83}$$

Désignons par k une quantité positive, infiniment petite, que nous faisons après égale à zéro, cette équation peut être regardée comme la limite de celle-ci.

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n [A_1 e^{-km_1} m_1^n e^{-m_1 x} + A_2 e^{-km_2} m_2^n e^{-m_2 x} + \text{etc.}] \tag{84}$$

quand on fait converger k vers zéro.

Cela posé, de la formule connue

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{(k - x\sqrt{-1})^p} dx = \frac{\varepsilon \pi e^{-k}}{\Gamma(p)} \tag{85}$$

on déduit facilement

$$e^{-km} m^n = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-m\chi\sqrt{-1}}}{(\chi\sqrt{-1} - k)^{n+1}} d\chi \tag{86}$$

A l'aide de cette formule, l'équation (84) peut s'écrire comme suit:

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{[\chi\sqrt{-1} - k]^{n+1}} [A_1 e^{-m_1(x+\chi\sqrt{-1})} + A_2 e^{-m_2(x+\chi\sqrt{-1})} + \text{etc.}]\, d\chi;$$

ou plus simplement,

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x + \chi\sqrt{-1})}{(\chi\sqrt{-1} - k)^{n+1}} d\chi; \tag{87}$$

faisant attention à ce que la quantité qui se trouve dans la parenthèse soit, en vertu de l'équation (82), égale à $\varphi(x + \chi\sqrt{-1})$. Faisant $\chi\sqrt{-1} + x = \chi\sqrt{-1}$, on voit avec un peu d'attention, que l'équation précédente peut être écrite comme suit:

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi\sqrt{-1})}{[x - \chi\sqrt{-1}]^{n+1}} d\chi; \tag{88}$$

On peut démontrer cette formule sans faire aucun usage de suites, procédant de la manière suivante.

Posons

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{-\theta x} \varphi_1(\theta)\, d\theta; \tag{89}$$

$\varphi_1(\theta)$ est une fonction de θ, inconnue ainsi que les limites a, b de l'intégrale. Différentions cette équation n fois en désignant par m une quantité positive infiniment petite, mettons y $x + m$ à la place de n; on aura

$$\frac{d^n . \varphi(x+m)}{dx^n} = (-1)^n \int_a^b e^{-\theta x} \theta^n e^{-m\theta} \varphi_1(\theta)\, d\theta.$$

La formule (86) permet de mettre cette équation sous la forme

$$\frac{d^n \varphi(x+m)}{dx^n} = (-1)^{2n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{(\chi\sqrt{-1}-m)^{n+1}} \int_a^b e^{-(x-\chi\sqrt{-1})\theta} \varphi, 1(\theta)\, d\theta,$$

ou

$$\frac{d^n . \varphi(x+m)}{dx^n} = (-1)^{2n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+\chi\sqrt{-1})}{[\chi\sqrt{-1}-m]^{n+1}} d\chi$$

en vertu de l'égalité (89). Si on met dans cette équation $\chi\sqrt{-1}$ à la place de $x+\chi\sqrt{-1}$, et qu'on fasse converger m vers la limite zéro, on retrouvera la formule (88) que nous avons précédemment donnée.

XV.

Avec ces différentes propositions entrons dans la construction des formules sommatoires que nous nous proposions de démontrer.

Pour cela prenons une fonction quelconque $\psi(x, a_n)$ d'une racine a_n de l'équation

$$F(x) = 0, \tag{90}$$

supposant que cette fonction soit pourtant telle qu'on ait

$$\psi(x, \infty) = 0. \tag{91}$$

Elle sera assujettie encore à d'autres restrictions qui résulteront même de notre démonstration. On aura, d'après le théorème de TAYLOR,

$$\psi(x, a_n) = \left[\frac{d \cdot \psi\left(n, \frac{1}{\delta}\right)}{d\delta}\right]_0 \frac{1}{a_n} + \left[\frac{d^2 \cdot \psi\left(n, \frac{1}{\delta}\right)}{d\delta^2}\right]_0 \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a_n^2} + \text{etc.}$$

si on fait attention à la condition ci-dessus mentionnée. Donnant à n les valeurs 1, 2, 3, etc., et sommant, membre à membre, les équations qui en résulteront, on aura

$$\left.\begin{aligned} \psi(x, a_1) + \psi(x, a_2) + \text{etc.} = {} & \left[\frac{d \cdot \psi\left(x, \frac{1}{\delta}\right)}{d\delta}\right] \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \text{etc.}\right) \\ & + 1 \cdot 2 \left[\frac{d^2 \cdot \psi\left(x, \frac{1}{\delta}\right)}{d\delta}\right] \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \text{etc.}\right) \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

Maintenant, en vertu de la formule (79), on peut mettre cette équation sous la forme

$$\psi(x, a_1) + \psi(x, a_2) + \text{etc.} = -\left[\frac{d \cdot \psi\left(x, \frac{1}{\delta}\right)}{d\delta}\right]_0 \frac{d \cdot lF(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1} \left[\frac{d^2 \cdot \psi\left(x, \frac{1}{\delta}\right)}{d\delta^2}\right]_0 \frac{d^2 \cdot lF(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} - \text{etc.}$$

La formule (88) la transformera encore en

$$\psi(x,a_1)+\psi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x,\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)\left[\frac{d\cdot lF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\frac{1}{[\delta-\chi\sqrt{-1}]^2}-\frac{d^2\cdot lF(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\frac{1}{[\delta-\chi\sqrt{-1}]^3}\frac{1}{1}\right.$$
$$\left.+\frac{d^3\cdot lF(\varepsilon)}{d\varepsilon^3}\frac{1}{[\delta-\chi\sqrt{-1}]^4}\frac{1}{1\cdot 2}-\text{etc.}\right]d\chi,$$

ou

$$\psi(x,a_1)+\psi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi\left(x,\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}{[\delta-\chi\sqrt{-1}]^2}\frac{d\cdot l\cdot F\left(\varepsilon-\frac{1}{\delta-\chi\sqrt{-1}}\right)}{d\varepsilon}d\chi.$$

Dans cette formule on doit faire, après les intégrations, $\delta=0$, $\varepsilon=0$, et si on peut le faire d'avance sans qu'elle devienne indéterminée, on aura

$$\psi(x,a_1)+\psi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{2\pi}{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x,\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)\frac{F'\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}{F\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}\frac{d\chi}{\chi^2}. \qquad (92)$$

D'après la démonstration que nous venons de donner de cette formule, il est bien clair qu'elle n'a pas lieu quelque soient les fonctions $F(x)\ \psi(x,a_n)$. En effet, $F(x)$ doit satisfaire aux conditions sous lesquelles la formule (73) subsiste, et $\psi(x,a_n)$, non seulement doit satisfaire à la condition sous laquelle la formule (79) subsiste et $\psi(x,a_n)$ non seulement doit satisfaire à la condition (91), mais encore à celle à laquelle $\varphi(x)$ est assujéti dans la formule (88).

Si au lieu d'avoir transformé $\psi(\dot{x},\frac{1}{\delta})$ par la formule (88), nous avions transformé $l\cdot F(\varepsilon)$, on aurait trouvé, procédant de la même manière

$$\psi(x,a_1)+\psi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}l\cdot F(\chi\sqrt{-1})\,\psi'(x,\chi\sqrt{-1})\,\chi^2\,d\chi, \qquad (93)$$

où $\psi'(x,\chi\sqrt{-1})$ est égal à la dérivée de $\psi(x,y)$ par rapport à y quand on met après $\chi\sqrt{-1}$ à la place de cette variable.

Il est facile de voir sous quelles conditions cette formule subsiste.

Prenons maintenant une autre fonction $\varphi(x,a_n)$ d'une racine a_n de la même équation (90). Supposons que cette fonction soit telle qu'on ait.

$$\varphi(x,0)=0. \qquad (94)$$

On aura

$$\varphi(x,a_n)=\left[\frac{d\cdot\varphi(x,\delta)}{d\delta}\right]_0\frac{a_n}{1}+\left[\frac{d^2\cdot\varphi(x,\delta)}{d\delta^2}\right]_0\frac{a_n^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}$$

Donnant à n la suite de valeurs 1, 2, 3, etc., et sommant, membre à membre, les équations qui en résultent, on aura

$$\varphi(x,a_1)+\varphi(x,a_2)+\text{etc.}=\left[\frac{d\cdot\varphi(x,\delta)}{d\delta}\right]_0(a_1+a_2+\text{etc.})+\frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{d^2\cdot\varphi(x,\delta)}{d\delta^2}\right]_0(a_1^2+a_2^2+\text{etc.})$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\frac{d^3\cdot\varphi(x,\delta)}{d\delta^3}\right]_0+\text{etc.} \qquad (95)$$

Cette équation, moyennant les formules (78) et (88) peut s'écrire comme suit:

$$\varphi(x,a_1)+\varphi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x,\chi\sqrt{-1})}{(\delta-\chi\sqrt{-1})^2}\frac{d\cdot}{d\varepsilon}\left[l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]-\frac{1}{(\delta-\chi\sqrt{-1})^2}\frac{d\cdot l\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{(\delta-\chi\sqrt{-1})^2}\frac{d^2\cdot l\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^2}-\text{etc.}\right]d\chi.$$

Faisant attention maintenant à ce que la suite qui dans la parenthèse soit égale à

$$\log\left[\left(\varepsilon-\frac{1}{\delta-\chi\sqrt{-1}}\right)^a F\left(\frac{1}{\varepsilon-\frac{1}{\delta-\chi\sqrt{-1}}}\right)\right]$$

on trouve, après avoir exécuté la différentiation indiquée, et fait $\delta=0$, $\varepsilon=0$, la formule

$$\varphi(x,a_1)+\varphi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\chi\sqrt{-1})\left[\frac{a}{\chi}\sqrt{-1}+\frac{F'(\chi\sqrt{-1})}{F(\chi\sqrt{-1})}\right]d\chi. \qquad (96)$$

Cette formule après la démonstration même que nous venons de donner, n'a pas lieu quelque soient les fonctions $\varphi(x,a_n)$ et $F(x)$. En effet, cette dernière fonction doit satisfaire aux conditions auxquelles $F(x)$ est assujéti dans la formule (78); et $\varphi(x,a_n)$, outre la condition (94), doit encore satisfaire à celles sous lesquelles la formule (88) subsiste. De même que la formule (79) nous a donné deux formules sommatoires, l'égalité (72) peut aussi nous donner, non seulement la formule déjà trouvée, mais une autre qu'on peut construire facilement.

XVI.

A l'aide du théorème de Fourier, on peut arriver à des formules plus générales, mais aussi plus compliquées que celles auxquelles nous sommes arrivés. Pour le faire voir, prenons une fonction générale $\varphi(x,a_n)$ telle pourtant qu'on ait

$$\varphi(x,0)=0; \qquad (97)$$

d'après le théorème cité, on a

$$\varphi(x,a_1)+\varphi(x,a_2)+\text{etc.}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\alpha)\,e^{\alpha\omega\sqrt{-1}}\left[e^{-\omega a_1\sqrt{-1}}+e^{-\omega a_2\sqrt{-1}}+\text{etc.}\right]d\alpha\,d\omega. \qquad (98)$$

Il s'agit maintenant de trouver la somme d'exponentielles qui est dans la parenthèse, ou plutôt de

$$\frac{-\omega\sqrt{-1}}{1}(a_1+a_2+\text{etc.})+\frac{(\omega\sqrt{-1})^2}{1\cdot 2}(a_1+a_2+\text{etc.}) \qquad (99)$$

qui résulte de son développement après qu'on y a mis à la place de chaque exponentielle la même exponentielle diminuée de l'unité, ce qui n'altère pas la valeur de l'équation ci-dessus, où, d'après l'égalité (94), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\alpha)\,e^{\alpha\omega\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\omega. \qquad (100)$$

A l'aide de la formule (79) que nous avons précédemment rappelée, la fonction (99) peut s'écrire comme suit:

$$\frac{\omega\sqrt{-1}}{1}\frac{d\cdot l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon}-\frac{(\omega\sqrt{-1})^2}{1\cdot 2\cdot 1}\frac{d^2\cdot l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^2}+\frac{(\omega\sqrt{-1})^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\frac{d^3\cdot l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^3}-\text{etc.};$$

l'égalité (85) la transforme encore en

$$\frac{e^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\chi\sqrt{-1}}\,\omega\sqrt{-1}}{[k-\chi\sqrt{-1}]^2}\frac{d\cdot}{d\varepsilon}\left[l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]-\frac{\omega\sqrt{-1}}{(k-\chi\sqrt{-1})}\frac{1}{1}\frac{d\cdot l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(\omega\sqrt{-1})^2}{(k-\chi\sqrt{-1})^2}\frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2\cdot l\cdot\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^2}-\text{etc.}\right]d\chi;$$

si on fait la somme de la quantité qui est dans la parenthèse, d'après la formule de TAYLOR et qu'on pose après $\varepsilon=0$, $k=0$, on trouvera, après quelques petites réductions faciles à voir,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\chi\sqrt{-1}}\left[\frac{F'\left(\frac{\chi}{\omega}\right)}{F\left(\frac{\chi}{\omega}\right)}\frac{1}{\omega}-\frac{a}{\chi}\right]d\chi;$$

et l'équation (98) deviendra

$$\varphi(x,a_1)+\varphi(x,a_2)+\text{etc.}$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\alpha)\,e^{(\alpha\omega-\chi)\sqrt{-1}}\left[\frac{F'\left(\frac{\chi}{\omega}\right)}{F\left(\frac{\chi}{\omega}\right)}\frac{1}{\omega}-\frac{a}{\chi}\right]d\chi\,d\alpha\,d\omega \qquad (101)$$

En s'appuyant sur la formule (72) et le théorème de FOURIER, on peut construire une autre formule comme celle-ci. Ces formules pourtant sont un peu trop compliquées. J'ai indiqué, dans mon Mémoire précédemment cité, comment on pourrait arriver à des plus simples en s'appuyant sur quelques résultats donnés par M. CAUCHY dans ses Exercices de Mathématique. Ce savant a aussi donné, dans le même ouvrage, quelques formules sommatoires très-simples, qu'il a trouvées au moyen de son Calcul des Résidus, et qui peuvent être ajoutées à celles que nous avons données précédemment et appliquées aux mêmes usages auxquelles nous allons appliquer les nôtres.

XVII.

Appliquant maintenant les différentes formules sommatoires par lesquelles nous sommes arrivés à la sommation de la suite (52), on arrivera à plusieurs théorèmes dont nous allons énoncer seulement quelques-uns.

Théorème II. Si on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x,\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta=F(x)=\frac{F_2(x)}{F_1(x)} \qquad (102)$$

où $f(x, \theta)$ est une fonction quelconque de θ et x; $F(x)$ une fonction quelconque de la même variable, α et β des constantes quelconques, finies ou infinies, réelles ou imaginaires, la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait est donnée par

$$\varphi(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}{{}_1f\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)} e^{x\Phi\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)} \frac{d\chi}{\chi^2}, \tag{103}$$

où ${}_1f(x)$ est déterminé par l'égalité

$${}_1f(x) = (x-a)\, e^{x\Phi(a)} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, e^{\theta\Phi(a)}\, d\theta \tag{104}$$

quand on y fait $a = x$; et $\Phi(a)$ est une racine, non multiple, de l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta\Phi(a)} f(a, \theta)\, d\theta} = 0 \tag{105}$$

résolue par rapport à $\Phi(a)$.

Nous avons obtenu ce théorème, en appliquant la formule sommatoire (92) à la sommation de la suite (52): il suppose, par conséquent, que

$$\frac{F_2(a_n)}{{}_1f(a_n)\, F_1(a_n)}\, e^{x\Phi(a_n)}, \qquad \frac{1}{F(x)}, \tag{106}$$

satisfassent aux conditions auxquelles les fonctions

$$\psi(x, a_n), \qquad F(x) \tag{107}$$

doivent respectivement satisfaire dans cette formule.

XVIII.

Si nous appliquons la formule (96) à la sommation de la suite (49), on aura le théorème suivant:

Théorème III. Si on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}, \tag{108}$$

où $f(x, \theta)$ est une fonction quelconque de x et θ; $F(x)$ une fonction quelconque de x; $F_1(x)$ une fonction telle que les équations

$$F(x) = \infty, \qquad \frac{1}{F_1(x)} = \infty, \tag{109}$$

aient les mêmes racines; $F_2(x)$, par conséquent, une fonction telle que l'équation $F_2(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour aucune valeur finie de x, et qu'on ait, en outre, $F_2(x) = F(x)\, F_1(x)$; la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait est donnée par

$$\varphi(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x\Phi(\chi\sqrt{-1})}}{{}^1f(\chi\sqrt{-1})}\left[\frac{a\,F_2(\chi\sqrt{-1})}{\chi\,F_1'(\chi\sqrt{-1})}\sqrt{-1} + F(\chi\sqrt{-1})\right]d\chi \qquad (110)$$

où ${}^1f(a)$ est déterminé par

$${}^1f(x) = (x-a)\,e^{x\Phi(a)}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,e^{\theta\Phi(a)}\,d\theta \qquad (111)$$

quand on fait y $x=a$, $\Phi(a)$ est une racine, pas multiple, de l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(a,\theta)\,e^{\theta\Phi(a)}\,d\theta = 0 \qquad (112)$$

résolue par rapport à $\Phi(a)$.

Dans ce théorème les fonctions

$$\frac{e^{x\Phi(a_r)}\,F_2(a_r)}{{}^1f(a_r)\,F'_1(a_r)}, \qquad F_1(x), \qquad (113)$$

doivent satisfaire aux conditions auxquelles sont assujétis

$$\varphi(x,a_r), \qquad F(x), \qquad (114)$$

dans la formule (96).

XIX.

Quand les racines a_1, a_2, a_3, etc., de l'équation (55) deviennent respectivement égales à 1, 2, 3, etc., ou, plus généralement, aux différentes valeurs qu'acquiert une certaine fonction ${}_2f(n)$ à indice variable n, quand on y fait successivement $n=1$, 2, 3, etc., fonction dont on conçoit facilement l'existence, quoiqu'on ne puisse pas toujours la déterminer, l'expression de $\varphi(x)$ prendra la forme

$$\varphi(x) = \frac{F_2[{}_2f(1)]}{{}_1f[{}_2f(1)]\,F_1[{}_2f(1)]}\,e^{x\Phi[{}_2f(1)]} + \frac{F_2[{}_2f(2)]}{{}_1f[{}_2f(2)]\,F'_2[{}_2f(2)]}\,e^{x\Phi[{}_2f(2)]} + \text{etc.} \qquad (115)$$

(${}_1f(x)$ étant déterminé par l'équation

$${}^1f(x) = (x-a_r)\,e^{x\Phi(a_r)}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,e^{\theta\Phi(a)}\,d\theta \qquad (116)$$

quand on y fait $a_r = x$); et, par conséquent, pourra être sommé par les formules que nous avons données dans le N° XI ou bien par le théorème de Fourier.

Théorème IV. Si on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x,\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)} \qquad (117)$$

où $f_1(x,\theta)$ est une fonction de x et θ, $F_1(x)$ une fonction de x ayant les mêmes racines que l'équation

$$\frac{1}{F(x)} = 0, \qquad (118)$$

$F(x)$ étant une fonction quelconque; $F_2(x)$ une fonction telle qu'on ait $F_2(x) = F(x)\,F_1(x)$, et, par conséquent, qui ne devienne infinie pour aucune valeur finie de x; on a pour la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \left[\frac{F_2[{}_2f(-\theta\sqrt{-1})]}{{}_1f[{}_2f(-\theta\sqrt{-1})]}\frac{e^{x\Phi[{}_2f(-\theta\sqrt{-1})]}}{F'_1{}_2f(-\theta\sqrt{-1})]} - \frac{F_2[{}_2f(\theta\sqrt{-1})]}{{}_1f[{}_2f(\theta\sqrt{-1})]}\frac{e^{x\Phi[{}_2f(\theta\sqrt{-1})]}}{F'_1[{}_2f(\theta\sqrt{-1})]}\right]\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi\theta} + \frac{1}{e^{\pi\theta}-1}\right)d\theta \quad (119)$$

si on suppose que les racines de l'équation

$$F_1(x) = 0 \quad (120)$$

soient respectivement égales à ${}_2f(1)$, ${}_2f(2)$, ${}_2f(3)$, etc., et si on détermine ${}_1f[{}_2f(n)]$ par l'équation

$${}_1f(x) = [x - {}_2f(n)\,e^{x\Phi[{}_2f(n)]}\int_\alpha^\beta f(x,\theta)\,e^{\theta\Phi[{}_2f(n)]}\,d\theta \quad (121)$$

quand on y fait $x = {}_2f(n)$; et $\Phi[{}_2f(n)]$ par l'équation

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta f[\theta, {}_2f(n)]\,e^{\Phi[{}_2f(n)]}\,d\theta} = 0. \quad (122)$$

On peut appliquer à la sommation de la suite (115) les autres formules sommatoires (84), (85), etc. que nous avons précédemment données, si sès termes deviennent alternativement positifs et négatifs. On peut toujours aussi appliquer à la sommation de la suite (115) le théorème de Fourier. Mais au lieu d'énoncer les différents théorèmes qui en résulteraient et que le lecteur peut facilement trouver, nous allons tâcher de mettre l'équation proposée sous une forme telle qu'elle conduise directement à une suite de cette forme.

XX.

Si l'équation proposée (7) est déjà telle que la fonction $F(x)$ contienne au dénominateur un facteur ${}_1F(x)$ tel que les racines de l'équation ${}_1F(x) = 0$ soient respectivement égales à k, $2k$, $3k$, etc., en la supposant mise sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(x,\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \frac{F_2(x)}{{}_1F(x)\,F_1(x)} = F(x). \quad (123)$$

$F_2(x)$ étant toujours une fonction de x telle que l'équation $F_2(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x, et, par conséquent, que les équations

$${}_1F(x) = 0, \qquad F_1(x) = 0.$$

contiennent toutes les racines de l'équation,

$$\frac{1}{F(x)} = 0,$$

et, comme nous pouvons les supposer seulement ces racines, il est très-facile de lui donner la forme désirée. Car multipliant ses deux membres par $F_1(x)$, on aura l'égalité

$$\int_{\alpha}^{\beta} F_1(x)\, f(x,\theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta \;=\; \frac{F_2(x)}{{}_1F(x)} \tag{124}$$

qui évidemment conduit à une série de la forme (115).

Si la fonction ${}_1F(x)$ se réduit à $\sin \pi x$, supposant la fonction $F_1(x)$ comprise dans la fonction $f(x,\theta)$ et mettant $F(x)$ à la place de $F_2(x)$, on aura

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta \;=\; \frac{F(x)}{\sin \pi x} \tag{125}$$

pour la forme qu'on peut donner à l'équation (7) quand son second membre renferme au dénominateur le facteur $\sin \pi x$. Dans cette transformée, ainsi qu'on vient de le voir, on peut toujours supposer que la quantité $F(x)$ soit telle que l'équation $F(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x.

Mais si l'équation proposée (7) n'a pas la forme que nous venons de lui supposer, on peut toujours lui donner celle

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta \;=\; F(x) \tag{126}$$

où $F(x)$ n'est pas une fonction quelconque de x, mais une fonction telle que l'équation $F(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x.

Cela posé, prenons les deux équations

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, \psi_1(\theta+x)\, d\theta \;=\; \frac{e^{\pi x \sqrt{-1}}\, F(x)}{2\sqrt{-1}\, \sin \pi x}, \tag{127}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, \psi_2(\theta+x)\, d\theta \;=\; \frac{e^{-\pi x \sqrt{-1}}\, F(x)}{2\sqrt{-1}\, \sin \pi x}: \tag{128}$$

il est bien clair que si on connait les deux fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, on aura $\varphi(x)$ par l'équation

$$\varphi(x) \;=\; \psi_1(x) \;-\; \psi_2(x). \tag{129}$$

Or, chacune des équations (127), (128) a la forme désirée pour conduire à une série de la forme (115); il en sera alors de même de (126) ou de l'équation primitive (7).

Appliquant à l'équation (121) la méthode des solutions données dans les pages antérieures, on trouve

$$\left.\begin{aligned} \pi\psi_1(x) = {} & \frac{F(0)}{2\,{}_1f(0)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_1(0)} - \frac{F(1)\, e^{\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_1f(1)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_1(1)} + \frac{F(2)\, e^{2\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_1f(2)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_1(2)} - \text{etc.} \\ & - \frac{F(-1)\, e^{-\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_1f(-1)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_1(-1)} + \frac{F(-2)\, e^{-2\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_1f(-2)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_1(-2)} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

où ${}_1f(n)$ est déterminé par la fonction

$${}_1f(x) \;=\; (x-n)\, e^{x\Phi_1(n)} \int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi_1(n)}\, d\theta \tag{131}$$

quand on y fait $x = n$; et $\Phi_1(n)$ est une racine de l'équation

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta f(n,\theta)\, e^{m\theta}\, d\theta} = 0 \tag{132}$$

résolue par rapport à m. — De l'équation (128) on déduit aussi pour $\psi_2(x)$ la fonction

$$\left.\begin{aligned}\pi\psi_2(x) = {} & \frac{F(0)}{2\,{}_2f(0)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_2(0)} - \frac{F(1)\, e^{-\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_2f(1)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_2(1)} + \frac{F(2)\, e^{-2\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_2f(2)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_2(2)} - \text{etc.} \\ & - \frac{F(-1)\, e^{\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_2f(-1)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_2(-1)} + \frac{F(-2)\, e^{2\pi\sqrt{-1}}}{2\,{}_2f(-2)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_2(-2)} - \text{etc.}\end{aligned}\right\} \tag{133}$$

où ${}_2f(n)$ est la valeur que prend la fonction

$${}_2f(x) = (x-n)\, e^{x\Phi_2(n)} \int_\alpha^\beta f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi_2(n)}\, d\theta \tag{134}$$

quand on y fait $x=n$; et $\Phi_2(n)$ est une racine de l'équation (132) résolue par rapport à m.

Sommant les deux séries précédentes au moyen de la formule de FOURIER, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème V. Si on a l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(x,\theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x), \tag{135}$$

où $f(x,\theta)$ est une fonction quelconque de x et θ; $F(x)$ une fonction de x telle que l'équation $F(x)=\infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x, on a

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) = {} & -\frac{1}{2\pi^2}\frac{F(0)}{2\,{}_1f(0)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_1(0)} \\ & + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\delta}\left[\frac{e^{\pi\delta\sqrt{-1}}}{1+e^{\gamma\sqrt{-1}}}\frac{F(\delta)}{{}_1f(\delta)}\, e^{x\Phi_1(\delta)} - \frac{e^{-\pi\delta\sqrt{-1}}}{1+e^{\gamma\sqrt{-1}}}\frac{F(-\delta)}{{}_1f(-\delta)}\, e^{x\Phi_1(-\delta)}\right] d\gamma\, d\delta \\ & + \frac{1}{2\pi^2}\frac{F(0)}{2\,{}_2f(0)\sqrt{-1}}\, e^{x\Phi_2(0)} \\ & - \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\delta}\left[\frac{e^{-\pi\delta\sqrt{-1}}}{1+e^{\gamma\sqrt{-1}}}\frac{F(\delta)}{{}_2f(\delta)}\, e^{x\Phi_2(\delta)} - \frac{e^{\pi\delta\sqrt{-1}}}{1+e^{\gamma\sqrt{-1}}}\frac{F(-\delta)}{{}_2f(-\delta)}\, e^{x\Phi_2(-\delta)}\right] d\gamma\, d\delta\end{aligned}\right\} \tag{136}$$

pour la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait. Dans cette expression $\Phi_1(n)$, $\Phi_2(n)$ sont deux racines, non multiples, de l'équation

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta f(n,\theta)\, e^{m\theta}\, d\theta} + 0 \tag{137}$$

résolue par rapport à m; et ${}_1f(n)$, ${}_2f(n)$ sont les valeurs que prennent les fonctions

$${}_1f(x) = (x-n)\, e^{x\Phi_1(n)} \int_\alpha^\beta f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi_1(n)}\, d\theta \tag{138}$$

$${}_2f(x) = (x-n)\, e^{x\Phi_2(n)} \int_\alpha^\beta f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi_2(n)}\, d\theta \tag{139}$$

quand on y fait $x=n$.

XXI.

Nous devons observer que dans tout ce qui précède nous aurions pu supposer que α et β étaient des fonctions quelconques de x. Nos solutions ne seraient pour cela presque pas changées. En effet, pour les généraliser de cette manière vous n'avez qu'à faire $x = a_n$ dans les limites α et β de l'intégrale qui entre dans l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(a_n, \theta)\, e^{m\theta}\, d\theta} = 0, \tag{140}$$

que nous avons rencontrée pour déterminer m. En mettant la valeur de m qu'on en déduit, valeur que nous avons ordinairement désignée par $\Phi(a_n)$ dans l'équation (52), on aura la valeur de $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (7), quand les limites de l'intégrale sont des fonctions de x. Cela équivaut, comme il est facile de voir, à trouver la valeur de la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, \varphi[f_1(x, \theta)]\, d\theta = F(x), \tag{141}$$

où $f(x,\theta)$, $f_1(x,\theta)$ sont deux fonctions absolument quelconques de x et θ; $F(x)$ une fonction de x; α et β des constantes quelconques.

Les autres méthodes que nous allons encore donner pour résoudre l'équation (7), s'appliqueront aussi au cas où α et β sont des fonctions quelconques de x: nous supposons pourtant, pour rendre plus simples les calculs, qu'elles soient des constantes: il sera après très-facile d'altérer les solutions qu'on aura trouvées pour passer d'une supposition à l'autre.

XXII.

Nous allons donner maintenant une autre méthode de solution de l'équation (7) qui conduit très-souvent à des calculs plus simples que celle que nous venons de trouver et qui peut être exposée de la manière suivante.

Changeant les limites et mettant θ à la place de $\theta + x$, cette équation peut prendre la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, \varphi(\theta)\, d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}; \tag{142}$$

α et β étant des fonctions quelconques de x; $F_2(x)$ une fonction de x telle que l'équation $F_2(x) = \infty$ ne puisse jamais avoir lieu pour des valeurs finies de x.

Supposons qu'une des limites α, β de l'intégrale précédente soit l'infini positif ou négatif, et que la fonction $f(x,\theta)$ soit telle qu'on ait $\varphi(\infty) = 0$ ou $\varphi(-\infty) = 0$, selon le signe de la limite infinie. Cette dernière supposition est très-permise, car si on fait $\varphi(\theta) = \psi(\theta) f_1(\theta)$, $\psi(\theta)$ étant la nouvelle inconnue et $f_1(\theta)$ une fonction de θ prise à volonté, il est toujours possible et facile, en disposant de cette dernière quantité, de rendre $f_1(\theta) f(x,\theta)$ une fonction telle que la supposition

$\theta = \pm\infty$ la rende infinie ; ce qui exige que la nouvelle fonction $\psi(\theta)$ soit telle qu'on ait $\psi(\pm\infty) = 0$ pour que l'intégrale ne devienne pas infinie.

Cela posé, il résulte d'un théorème de Mr. CAUCHY (Exercices de Mathématique, 2me année p. 279), qu'on a toujours

$$\varphi(\theta) = E\frac{((\varphi(z)))}{\theta - z}; \tag{143}$$

ou autrement,

$$\varphi(\theta) = \frac{\varphi_1(b_1)}{\theta - b_1} + \frac{\varphi_1(b_2)}{\theta - b_2} + \frac{\varphi_1(b_3)}{\theta - b_3} + \text{etc.} \tag{144}$$

en désignant par $\varphi_1(b_m)$ la valeur que prend $\varepsilon\varphi(b_n + \varepsilon)$ quand on fait converger ε vers zéro: b_1, b_2, b_3, etc. sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0. \tag{145}$$

Mettant dans l'équation (136) la précédente valeur de $\varphi(\theta)$, et supposant que la limite infinie soit β (on peut toujours la supposer positive), on aura

$$\varphi_1(b_1)\int_\alpha^\infty \frac{f(x,\theta)}{\theta - b_1}d\theta + \varphi_1(b_2)\int_\alpha^\infty \frac{f(x,\theta)}{\theta - b_2}d\theta + \varphi_1(b_3)\int_\alpha^\infty \frac{f(x,\theta)}{\theta - b_3}d\theta + \text{etc.} = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}; \tag{146}$$

ou bien

$$\frac{\varphi_1(b_1)}{f_1(b_1, x)} + \frac{\varphi_1(b_2)}{f_1(b_2, x)} + \frac{\varphi_1(b_3)}{f_1(b_3, x)} + \text{etc.} = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}, \tag{147}$$

si on fait, pour abréger,

$$\int_\alpha^\infty \frac{f(x,\theta)}{\theta - b_n}d\theta = \frac{1}{f_1(x, b_n)}. \tag{148}$$

Désignons, comme précédemment, par a_1, a_2, a_3, etc. les racines de l'équation

$$F_1(x) = 0. \tag{149}$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation (147) par $F_1(x)$ et si on y fait successivement $x = a_1, a_2, a_3$, etc., le second membre ne se réduisant pas à zéro (puisque les fonctions peuvent être censées n'avoir pas des facteurs communs), il faut que la même chose ait lieu pour le premier. Ainsi si on fait $x = a_n$, et si on multiplie l'équation par $F_1(x)$, il faut que quelqu'un des termes du premier membre ne s'évanouisse pas. Supposons que ce soit

$$\frac{\varphi_1(b_n)}{f_1(x, b_n)}, \tag{150}$$

tous les autres se réduisant à zéro ; on aura

$$\varphi_1(b_n)\frac{F_1(a_n)}{f_1(b_n, a_n)} = F_2(a_n). \tag{151}$$

Mais $F_1(a_n)$ étant égal à zéro puisque a_n est une racine de l'équation (149), il faut nécessairement qu'on ait

$$f_1(b_n, a_n) = 0 \tag{152}$$

pour que la constante $\varphi_1(b_n)$ ne devienne pas infinie.

Cette équation montre que b_n est une fonction de a_n, fonction qu'on obtient en résolvant cette équation, et que je désignerai par $\Phi(a_n)$. Supposant que l'équation n'ait pas des racines égales, ainsi que l'équation (149), la valeur de $\varphi_1(b_n)$ ou $\varphi_1[\Phi(a_n)]$, déduite de l'égalité (152) est

$$\varphi_1[\Phi(a_n)] = \frac{F_2(a_n)}{F_1'(a_n)}[f_1(x,\Phi(a_n))]'_{x=a_n}, \tag{153}$$

en désignant par

$$[f_1(x,\Phi(a_n))]_{x=a_n} \tag{154}$$

la dérivée de

$$f_1(x,\Phi(a_n)) \tag{155}$$

par rapport à x, quand on y remplace x par a_n.

On aura donc définitivement

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{F_1'(a_1)}\frac{[f_1(x,\Phi(a_1))]'_{x=a_1}}{x-\Phi(a_1)} + \frac{F_2(a_2)}{F_1'(a_1)}\frac{[f_1(x,\Phi(a_2))]'_{x=a_2}}{x-\Phi(a_2)} + \text{etc.} \tag{156}$$

pour la valeur de $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\int_\alpha^\infty f(x,\theta)\varphi(\theta)\,d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}. \tag{157}$$

XXIII.

On peut sommer la suite (156) au moyen des formules sommatoires que nous avons précédemment données, et arriver à plusieurs expressions de la fonction $\varphi(x)$. Ainsi, par exemple on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème VI. Si on a l'équation

$$\int_\alpha^\infty f(x,\theta)\varphi(\theta)\,d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}, \tag{158}$$

où $F(x)$ est une fonction quelconque de x; α une constante quelconque; $f(x,\theta)$ une fonction de x et θ telle que pour que l'intégrale devienne finie on doive avoir $\varphi(\infty) = o$ et en outre $\varphi(-\infty) = o$, la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait est égale à

$$\varphi(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)\frac{f_2\left[\frac{1}{\chi\sqrt{-1}},\Phi\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)\right]}{x-\Phi\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}\frac{d\chi}{\chi^2}, \tag{159}$$

en faisant, pour abréger,

$$[f_1(x,\Phi(a_n))]'_{x=a_n} = f_2(a_n,\Phi(a_n)), \tag{160}$$

$$\int_\alpha^\infty \frac{f(x,\theta)}{\theta-\Phi(a_n)}\,d\theta = \frac{1}{f_1(x,\Phi(a_n))}; \tag{161}$$

et désignant par $\Phi(a_n)$ une racine de l'équation

$$\frac{1}{\int_\alpha^\infty \frac{f(a_n,\theta)}{\theta-\Phi(a_n)}\,d\theta} = o. \tag{162}$$

XXIV.

Pour rendre nos calculs plus clairs nous avons commencé par particulariser un peu l'équation (7) la réduisant à l'équation (157). Mais suivant la même marche que nous venons de tracer, on peut facilement énoncer le théorème plus général.

Théorème VII. Si on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}, \tag{163}$$

où $f(x,\theta)$, $F(x)$, α, β sont quatre fonctions, la première de x et θ, les trois autres de x seulement, telles que la fonction inconnue $\varphi(x)$ doive satisfaire à la condition de se réduire à zéro pour des valeurs infinies positives ou négatives de x, mais d'ailleurs quelconques, la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait est donnée par l'équation

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{F_1'(a_1)}\,\frac{[f_1(x,\Phi(a_1))]'_{x=a_1}}{x-\Phi(a_1)} + \frac{F_2(a_2)}{F_1'(a_1)}\,\frac{[f_1(x,\Phi(a_2))]'_{a=x_2}}{x-\Phi(a_2)} + \text{etc.} \tag{164}$$

où on a fait, pour abréger

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x,\theta)}{\theta+x-\Phi(a_n)}\,d\theta = \frac{1}{f_1(x,\Phi(a_n))}, \tag{165}$$

$$[f_1(x,\Phi(a_n))]'_{x=a_n} = f_2(a_n,\Phi(a_n)); \tag{166}$$

$\Phi(a_n)$ désignant une racine, pas multiple, de l'équation

$$f_1(a_n,\Phi(a_n)) = 0. \tag{167}$$

XXV.

Quand l'équation (158) a ses deux limites infinies, en l'écrivant, pour plus de commodité, comme suit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\theta)}{f(x,\theta)}\,d\theta = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)} \tag{168}$$

la détermination de $\varphi(\theta)$ devient sensiblement plus facile, en vertu de la formule (88). En effet, prenant pour représenter $\varphi(\theta)$ la suite

$$\varphi(\theta) = \frac{\varphi_1(a_1)}{\Phi(a_1)-\theta\sqrt{-1}} + \frac{\varphi_1(a_2)}{\Phi(a_2)-\theta\sqrt{-1}} + \frac{\varphi_1(a_3)}{\Phi(a_3)-\theta\sqrt{-1}} + \text{etc.} \tag{169}$$

l'équation précédente deviendra

$$\varphi_1(a_1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(x,\theta)}\,\frac{1}{\Phi(a_1)-\theta\sqrt{-1}}\,d\theta + \varphi_1(a_2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(x,\theta)}\,\frac{1}{\Phi(a_2)-\theta\sqrt{-1}}\,d\theta + \text{etc.} = F(x) = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}; \tag{170}$$

mais comme, eu égard à la formule citée, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(x,\theta)}\,\frac{1}{\Phi(a_n)-\theta\sqrt{-1}}\,d\theta = \frac{1}{f(x,-\Phi(a_n)\sqrt{-1})}, \tag{171}$$

elle prendra encore la forme

$$\frac{2\pi\varphi_1(a_1)}{f[x,-\Phi(a_1)\sqrt{-1}]}+\frac{2\pi\varphi_1(a_2)}{f[x,-\Phi(a_2)\sqrt{-1}]}+\frac{2\pi\varphi_1(a_3)}{f[x,-\Phi(a_3)\sqrt{-1}]}+\text{etc.}=\frac{F_2(x)}{F_1(x)}. \quad (172)$$

Faisant maintenant $x=a_n$, il faut premièrement que l'équation

$$f[a_n,-\Phi(a_n)\sqrt{-1}]=0 \quad (173)$$

ait lieu; chose qui est généralement possible à cause de la fonction arbitraire $\Phi(a_n)$ qui, par ce moyen là, restera déterminée. L'égalité (169) donne après

$$\varphi(x)=\frac{F_2(a_1)}{2\pi F_1'(a_1)}\frac{f_1[a_1,\Phi(a_1)\sqrt{-1}]}{\Phi(a_1)-x\sqrt{-1}}+\frac{F_2(a_2)}{F_1'(a_2)}\frac{f_1[a_2,\Phi(a_2)\sqrt{-1}]}{\Phi(a_2)-x\sqrt{-1}}+\text{etc.}, \quad (174)$$

en faisant, pour abréger

$$[f(x,-\Phi(a_n)\sqrt{-1}]'_{x=a_n}=f_1[a_n,\Phi(a_n)\sqrt{-1}]. \quad (175)$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème VIII. Si on a l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\theta)}{f(x,\theta)}d\theta=F(x)=\frac{F_2(x)}{F_1(x)}, \quad (176)$$

où $F(x)$ est une fonction quelconque de x; $f(x,\theta)$ une fonction telle qu'on ait

$$f(x,\pm\infty)=\infty \quad (177)$$

(condition nécessaire pour que l'égalité (171) puisse avoir lieu), la valeur de $\varphi(x)$ qui la satisfait est donnée par l'expression

$$\varphi(x)=\frac{F_2(a_1)}{2\pi F_1'(a_1)}\frac{f_1[a_1,\Phi(a_1)\sqrt{-1}]}{\Phi(a_1)-x\sqrt{-1}}+\frac{F_2(a_2)}{2\pi F_1'(a_2)}\frac{f_1[a_2,\Phi(a_2)\sqrt{-1}]}{\Phi(a_2)-x\sqrt{-1}}+\text{etc.} \quad (178)$$

où on a fait pour abréger

$$[f(x,-\Phi(a_n)]\sqrt{-1}]'_{x=a_n}=f_1[a_n,\Phi(a_n)\sqrt{-1}], \quad (179)$$

et où $\Phi(a_n)$ désigne une racine, pas multiple de l'équation

$$f[a_n,-\Phi(a_n)\sqrt{-1}]=0. \quad (180)$$

XXVI.

Le problème de déterminer une fonction inconnue qui entre sous le signe d'intégration définie, peut toujours se réduire, tant que la fonction inconnue y entre d'une manière linéaire, à une équation de la forme (7), ou, du moins, à une autre, qu'on peut traiter comme cette équation. Ainsi si on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x,\theta)\varphi(f_1(\theta)f_2(x))\,d\theta=F(x); \quad (181)$$

faisant $\varphi(x)=\psi(l.x)$, on aura

$$\int_{l.f_1(\alpha)}^{l.f_1(\beta)}f[{}_2f(y),{}_1f(\omega)]\psi(y+\omega)\,{}_1f'(\omega)\,d\omega=F[{}_2f(y)], \quad (182)$$

en changeant les variables moyennant les équations l. $f_1(\theta) = \omega$, l. $f_2(x) = y$, et en désignant par ${}_1f(\omega)$, ${}_2f(y)$ les valeurs de θ et x qu'on en déduit. Cette équation est maintenant de la forme (7)

Si on a l'équation

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)\,\varphi[x+f_1(x,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)]\,d\theta_1\,d\theta_2\cdots d\theta_n = F(x), \qquad (183)$$

on peut faire

$$x + f_1(x,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n) = x + \omega, \qquad (184)$$

et la transformer tout de suite en une équation de la forme (7); ou, ce qui est bien mieux, procéder directement à la détermination de $\varphi(x)$ comme si c'était l'équation (7). Le fait d'avoir dans l'équation (163) plusieurs intégrations définies n'altère aucunement les méthodes que nous avons données. Il me semble inutile d'entrer dans d'autres développements là dessus. Je dirai pourtant quelques mots sur une classe d'équations de ce genre qui est très-générale et très-digne d'attention par les nombreuses applications dont elle est susceptible.

XXVII.

Définissons la caractéristique Π par l'équation

$$\left.\begin{aligned}\Pi = a_{0,0,0,0} &+ a_{1,0,0,0}D &+ a_{2,0,0,0}D^2 &+ \text{etc.}\\ &+ a_{0,1,0,0}\Delta &+ a_{1,1,0,0}D\Delta &+ \text{etc.}\\ &+ a_{0,0,1,0}\textstyle\int &+ a_{1,0,0,1}D\Sigma &+ \text{etc.}\\ &+ a_{0,0,0,1}\Sigma &+ a_{0,2,0,0}\Delta^2 &+ \text{etc.}\\ & &+ a_{0,1,1,0}\Delta\textstyle\int &+ \text{etc.}\\ & &+ a_{0,0,2,0}\textstyle\int^2 &+ \text{etc.}\\ & &+ a_{0,1,0,1}\textstyle\int\Sigma &+ \text{etc.}\\ & &+ a_{0,0,0,2}\Sigma^2 &+ \text{etc.}\end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

où D représente la caractéristique de dérivation en calcul différentiel. Prenant maintenant plusieurs caractéristiques du même genre, Π_1, Π_2, Π_3, etc. différant les unes des autres par les coefficients constants qui y sont désignés par la lettre a, on pourra toujours, d'après ce qui précède, résoudre l'équation

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1(x,\theta)\,\Pi_1\varphi(x+0)\,d\theta + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(x,\theta)\,\Pi_2\varphi(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f_3(x,\theta)\,\Pi_3\varphi(x+\theta)\,d\theta + \text{etc.} = F(x). \qquad (186)$$

Suivant la première des méthodes que nous avons données, on pourra y arriver en peu de mots comme suit:

Posons premièrement

$$\Pi_n = \nabla(n, D, \Delta, \textstyle\int, \Sigma), \qquad (187)$$

et prenons pour la valeur inconnue de $\varphi(x)$ la série

$$\varphi(x) = \Sigma A_n e^{m_n x} \qquad (188)$$

$F(x)$ étant développé en série d'après l'équation (40), et ses coefficients donnés par les égalités (42) en mettant cette valeur de $\varphi(x)$ dans l'équation (186), on aura

$$\Sigma A_n e^{m_n x}\left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1(x,\theta)\nabla\left(1, m_n, e^{m_n}-1, \frac{1}{m_n}, \frac{1}{e^{m_n}-1}\right) e^{m_n\theta}\, d\theta\right.$$

$$\left. + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(x,\theta)\nabla\left(2, m_n, e^{m_n}-1, \frac{1}{m_n}, \frac{1}{e^{m_n}-1}\right) e^{m_n\theta}\, d\theta + \text{etc.}\right] = \Sigma \frac{F_2(a_n)}{f_n(a_n) F_1(a_n)} \frac{f_n(x)}{x-a_n}. \quad (189)$$

Si on fait, pour abréger,

$$e^{m_n x}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x,\theta)\nabla\left(1, m_n, e^{m_n}-1, \frac{1}{m_n}, \frac{1}{e^{m_n}-1}\right) e^{m_n\theta}\, d\theta\right.$$

$$\left. + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x,\theta)\Delta\left(2, m_n, e^{m_n}-1, \frac{1}{m_n}, \frac{1}{e^{m_n}-1}\right) e^{m_n\theta}\, d\theta + \text{etc.}\right] = {}_1f(m_n, x), \quad (190)$$

elle se réduit à

$$\Sigma A_n\, {}_1f(m_n, x) = \Sigma \frac{F_2(a_n)}{f_n(a_n) F_1(a_n)} \frac{f_1(x)}{x-a_n}, \quad (191)$$

et restera satisfaite si on fait

$${}_1f(m_n, x) = \frac{f_n(x)}{x-a_n}, \qquad A_n = \frac{F_2(a_n)}{f_n(a_n) F_1(a_n)}. \quad (192)$$

Le second membre de la première de ces équations se réduisant à l'infini pour $x = \infty$, il faut que la même chose ait lieu pour le premier, et, par conséquent, qu'on ait

$$\frac{1}{{}_1f(m_n, a_n)} = 0. \quad (193)$$

C'est cette équation qui doit déterminer m_n. Cela fait, la première équation (192) donne après $f_n(x)$ et la seconde A_n. Supposons l'équation (193) résolue par rapport à m_n, et désignons par $\Phi(a_n)$ une de ses racines choisie parmi celles qui ne sont pas multiples, et désignons par

$${}_2f[a_n, \Phi(a_n)] \quad (194)$$

la valeur que prend

$$(x-a_n)\, {}_1f(m_n, x) \quad \text{ou} \quad f_n(x) \quad (195)$$

quand on y fait $x = a_n$, on aura définitivement

$$\varphi(x) = \Sigma \frac{F_2(a_n)}{{}_2f[a_n, \Phi(a_n)] F_1(a_n)} e^{\Phi(a_n)x}. \quad (196)$$

On peut maintenant, si on veut, mettre cette fonction sous forme finie au moyen de nos formules sommatoires. Si on fait, par exemple, usage de la formule (92), on aura

$$\varphi(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \frac{F\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}{{}_2f\left[\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}, \Phi\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)\right]} e^{x\Phi\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)} \frac{d\chi}{\chi^2}. \quad (197)$$

XXVIII.

La solution que nous avons donnée de l'équation (7) au commencement de ce Mémoire suppose que l'équation (48) ait, au moins, une racine. Cela a généralement lieu, puisque l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} e^{m_n \theta} f(a_n, \theta)\, d\theta$, en disposant convenablement de α, β, m_n et $f(a_n, \theta)$, peut représenter une fonction quelconque. Or, les fonctions prises dans leur généralité sont de la forme $\frac{F_2(x)}{F_1(x)}$, c'est-à-dire, telle que, étant égalées à zéro ou à l'infini, elles donnent plusieurs racines pour les équations qui en résultent. Ou, autrement, si on imagine que $F(x)$ représente successivement toutes les fonctions possibles, à une seule variable, les cas où les équations

$$F(x) = 0, \qquad \frac{1}{F(x)} = 0, \tag{198}$$

pourront avoir lieu, sont beaucoup plus nombreux que ceux où on ne pourra en établir qu'une seule. Mais, malgré cela, comme toutes les quantités qui entrent dans l'intégrale ci-dessus sont données, il se peut qu'il y ait des cas où l'équation (48) n'ait pas lieu pour des valeurs finies de a_n; et où, par conséquent, la solution que nous avons donnée deviendrait illusoire, s'il n'y avait pas moyen de parer à cet inconvénient là. Heureusement nous en avons un et bien simple.

Posons

$$\varphi(x) = \psi_1(x)\, \psi(x); \tag{199}$$

$\psi(x)$ étant une nouvelle inconnue, et $\psi_1(x)$ une fonction de x dont nous pouvons disposer arbitrairement; l'équation proposée devient alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, \psi_1(x+\theta)\, \psi(x+\theta)\, d\theta = F(x); \tag{200}$$

et l'équation (48)

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{m_n \theta} f(a_n, \theta)\, \psi_1(a_n+\theta)\, d\theta} = 0: \tag{201}$$

mais comme $\psi_1(x)$ est une quantité arbitraire, nous pourrons en disposer pour que cette équation ait une racine, et une racine simple. Ce problème est très-facile dans chaque cas particulier et bien différent du proposé, puisqu'il ne s'agit pas de trouver la fonction $\psi_1(x)$ qui satisfasse à une équation de la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{m_n \theta} f(a_n, \theta)\, \psi(a_n+\theta)\, d\theta = {}_1F(a_r, m_r), \tag{202}$$

où ${}_1F(a_r, m_r)$ est une quantité complètement déterminée; mais à une autre de la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{m_n \theta} f(a_n, \theta)\, \psi_1(a_n+\theta)\, d\theta = \frac{{}_1F(a_n, m_n)}{m_n - \Phi(a_n)} \tag{203}$$

où ${}_1F(a_n, m_n)$ est une fonction absolument arbitraire, ainsi que $\Phi(a_n)$. Or un tel problème peut être mis au nombre de ceux qu'on sait résoudre.

Nous avons aussi supposé que l'équation (48) n'ait pas des racines égales. Mais il est bien clair que notre solution aura encore lieu quand même quelques-unes des racines a_1, a_2, a_3, etc., de-

viendraient égales entre elles. Pour passer d'une supposition à l'autre, on n'a qu'à répéter le raisonnement si souvent fait en Analyse dans des problèmes analogues.

Les mêmes remarques peuvent être faites relativement à la seconde méthode que nous avons donnée, pour résoudre l'équation (7).

XXIX.

Avant d'aller plus loin, entrons dans quelques considérations sur les suites divergentes, sur l'usage qu'on en peut faire dans la solution des problèmes généraux d'Analyse, et spécialement du genre de ceux que nous avons traités.

Si nous avons la série infinie

$$f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1} + \text{etc.} \qquad (204)$$

et si elle est telle que les termes du $(n+1)^{\text{me}}$ rang et suivants deviennent aussi petits qu'on voudra, il est évident qu'on pourra la remplacer par

$$f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}. \qquad (205)$$

Si nous ajoutons après à cette quantité successivement un nombre quelconque de termes

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n(n+1)} f^{(n+1)}(a), \quad \frac{(x-a)^{n+2}}{1\cdot 2\cdots (n+1)(n+2)} f^{(n+2)}(a) \text{ etc.}, \qquad (206)$$

on aura de nouvelles quantités qui seront sensiblement égales à la précédente et qui se rapprochent toutes, comme on sait, indéfiniment de $f(x)$, qui est leur limite. C'est cette limite qui est regardée comme la somme de la série (204). C'est l'idée que tout le monde se fait d'une suite convergente. Mais quel sens donner à la série (204) quand ses termes au lieu de s'évanouir pour des valeurs croissantes de n, conservent toujours une grandeur finie ou croissent d'une manière quelconque, sans avoir même d'autre espèce de limite que l'infini? Aucun; à moins qu'on n'en fasse pas une nouvelle convention.

Quand la série (204) est convergente, on peut toujours poser

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.} \qquad (207)$$

entendant pour l'expression du second membre un polynome de la forme (205), dont le degré est plus ou moins élevé; et nous pouvons toujours quand nous rencontrons $f(x)$ le remplacer par cette série, ou bien quand nous rencontrons cette série, l'éliminer, si cela nous convient, au moyen de l'équation précédente.

Cela posé, que la suite (204) soit convergente ou non, faisons toujours

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.} \qquad (208)$$

Si le second membre est convergent, cette équation est parfaitement légitime; mais s'il ne l'est pas, comme, imaginant, pour le moment, toutes les fonctions possibles à une seule variable développées

suivant les puissances ascendantes de $(x-a)$ (a étant une constante indéterminée) chacune donne lieu à une série et à une série seulement, et que ces séries sont toujours différentes les unes des autres si les quantités qui les produisent le sont aussi, il en résulte que chacune porte avec elle l'empreinte ou le cachet de la quantité d'où elle provient. Posant donc l'égalité (208), nous regarderons la série du second membre, quand elle est divergente, comme une espèce de symbole remplaçant la fonction $f(x)$; et cela n'a pas le moindre inconvénient pourvu qu'à la fin des calculs nous remplacions toutes les séries ou expressions symboliques de ce genre qu'on rencontrera par leurs fonctions génératrices.

Maintenant je remarque qu'on peut exécuter sur le symbole

$$f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.}, \tag{209}$$

toutes les opérations qu'on a à exécuter sur $f(x)$, comme s'il était une fonction ordinaire, et que le nouveau symbole qui en résultera coincidera avec le symbole de la nouvelle quantité qui résulte de $f(x)$, quand cette fonction a subi les mêmes opérations. Ou, autrement, si on représente par B la caractéristique d'une opération quelconque, du genre de celles qu'on nomme linéaires, on a toujours

$$Bf(x) = B\left[f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.}\right]. \tag{210}$$

Cela est facile à voir quand il s'agit des opérations ordinaires de différentiation, d'intégration, etc. En prenant, par exemple, le coefficient différentiel de (209) on aura

$$f'(a) + f''(a)\frac{(x-a)}{1} + f'''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.}; \tag{211}$$

or ce symbole s'accorde avec celui qu'on aurait obtenu en développant $f'(a)$ par le théorème de Taylor. La même chose serait arrivée si on avait différentié ou intégré un nombre quelconque de fois. Si on met dans l'équation (210) Π au lieu de B, cette caractéristique étant définie par l'équation (185), on peut facilement voir que (209), après l'opération Π, coïncide exactement avec le symbole qui convient à $\Pi f(x)$.

Il y a aussi une opération pratiquée sur les suites divergentes, qui a été employée par tout le monde, quoiqu'on n'en ait pas donné une démonstration, et qui, pourtant, convenablement faite, est très-légitime, comme on peut le voir dans le cas très-étendu que nous allons traiter, et qui embrasse presque tous les problèmes du même genre qu'on puisse se proposer.

Supposons qu'on demande quelle est la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \tag{212}$$

où $f(x)$, $F(x)$ sont deux fonctions quelconques de x; α et β des constantes quelconques.

Nous allons donner deux méthodes pour résoudre cette équation, une fondée sur des développements divergents, et l'autre qui en est tout-à-fait indépendante, pour les comparer après.

Nous avons montré dans le N° IV que, si on a une fonction quelconque $F(x)$, il est toujours permis de la mettre sous la forme

$$F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega. \tag{213}$$

L'équation (212) peut donc se mettre sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\varphi(\theta+x)\,d\theta = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega. \tag{214}$$

Par la même raison, on peut faire

$$\varphi(x) = \int_{a_1}^{b_1} e^{-h\omega x}\,\varphi_1(\omega)\,d\omega, \tag{215}$$

a_1, b_1 étant des constantes et $\varphi_1(\omega)$ une fonction de a, à déterminer.

Mettant cette expression de $\varphi(x)$ dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\int_{a_1}^{b_1} e^{-h\omega x}\,\varphi_1(\omega)\,d\omega \int_{\alpha}^{\beta} e^{-h\omega\theta} f(\theta)\,d\theta = \int_{a}^{b} e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega : \tag{216}$$

on la satisfait en faisant

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b, \qquad \varphi_1(\omega) = \frac{F_1(\omega)}{\int_a^b e^{-h\omega\theta} f(\theta)\,d\theta} : \tag{217}$$

on aura donc

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{e^{-h\omega x} F_1(\omega)}{\int_\alpha^\beta e^{-h\omega\theta} f(\theta)\,d\theta}\,d\omega \tag{218}$$

pour la valeur de $\varphi(\omega)$ qui satisfait à l'équation (212).

On peut donner une autre forme à cette valeur de $\varphi(x)$, posant, d'après le N° IV,

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{-h\omega\theta} f(\theta)\,d\theta} = \int_\gamma^\delta e^{-h\chi\omega} f_1(\chi)\,d\chi ; \tag{219}$$

elle se transforme en

$$\varphi(x) = \int_\gamma^\delta f_1(\chi)\,d\chi \int_a^b F_1(\omega)\, e^{-(\chi+x)h\omega}\,d\omega ; \tag{220}$$

ou

$$\varphi(x) = \int_\gamma^\delta f_1(\chi)\, F(x+\chi)\,d\chi , \tag{221}$$

en vertu de l'égalité (213).

Donnons maintenant la solution fondée sur des séries divergentes. Mettons au lieu de $\varphi(x+\theta)$ son développement donné par la série de Taylor. Remplaçons aussi $\varphi(x)$, $F(x)$ par des suites divergentes ou symboles de la forme

$$\varphi(x) = B_0 + B_1 e^{m_1 x} + B_2 e^{m_2 x} + \text{etc.}, \tag{222}$$

$$F(x) = A_0 + A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + \text{etc.} \tag{223}$$

J'ai dit des suites divergentes, parceque, envisageant la question dans toute sa généralité, elles le sont. Nous avons aussi mis les mêmes constantes m_1, m_2, m_3, etc., dans les exponentielles des deux séries parceque la suite des calculs fait voir qu'on peut le faire.

Faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} \int_\alpha^\beta f(\theta)\,\theta^n\,d\theta = f_2(n) \tag{224}$$

l'équation (212), après les substitutions que nous venons d'indiquer, deviendra

$$\left.\begin{aligned} & B_0 f_2(0) + B_1 [f_2(0) + f_2(1) m_1 + f_2(2) m_1^2 + \cdots\cdots + f_2(n) m_1^n + \text{etc.}] e^{m_1 x} \\ & \quad + B_2 [f_2(0) + f_2(1) m_2 + f_2(2) m_2^2 + \cdots\cdots + f_2(n) m_2^n + \text{etc.}] e^{m_2 x} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \quad + B_r [f_2(0) + f_2(1) m_r + f_2(2) m_r^2 + \cdots\cdots + f_2(n) m_r^n + \text{etc.}] e^{m_r x} \\ & \quad + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (225)$$

$$= A_0 + A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + \cdots\cdots\cdots + A_r e^{m_r x} + \text{etc.}$$

On en déduit, par comparaison, les équations

$$\left.\begin{aligned} B_0 f_2(0) &= A_0 \quad B_1 [f_2(0) + f_2(1) m_1 + f_2(2) m_1^2 + \cdots\cdots + f_2(n) m_1^n + \text{etc.}] = A_1, \\ & \quad B_2 [f_2(0) + f_2(1) m_2 + f_2(2) m_2^2 + \cdots\cdots + f_2(n) m_1^n + \text{etc.}] = A_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \quad B_r [f_2(0) + f_2(1) m_r + f_2(2) m_r^2 + \cdots\cdots + f_2(n) m_r^n + \text{etc.}] = A_r, \\ & \quad \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (226)$$

qui se réduisent à

$$B_0 = \frac{A_0}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta}, \qquad B_1 = \frac{A_1}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{m_1 \theta}\, d\theta}, \qquad B_2 = \frac{A_2}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{m_2 \theta}\, d\theta}, \qquad \text{etc.} \quad (227)$$

si on fait attention à l'égalité (224).

On a donc

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta} + \frac{A_1}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{m_1 \theta}\, d\theta} e^{m_1 x} + \frac{A_2}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{m_2 \theta}\, d\theta} e^{m_2 x} + \text{etc.} \quad (228)$$

D'après l'égalité (219) on a

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{m_r \theta}\, d\theta} = \int_\gamma^\delta e^{m_r x} f_1(\chi)\, d\chi, \quad (229)$$

et l'équation précédente deviendra

$$\varphi(x) = \int_\gamma^\delta f_1(\chi) [A_0 + A_1 e^{(\chi+x) m_1} + A_2 e^{(\chi+x) m_2} + \text{etc.}]\, d\chi : \quad (230)$$

mais comme la quantité qui est dans la parenthèse est égale à $F(x+\chi)$, eu égard à l'équation (223), on aura définitivement

$$\varphi(x) = \int_\gamma^\delta f_1(\chi)\, F(x+\chi)\, d\chi ; \quad (231)$$

ce qui s'accorde avec l'expression de $\varphi(x)$ que nous avons donnée précédemment.

Ainsi nonobstant les suites divergentes qui se sont introduites dans cette solution et les opérations que nous avons exécutées sur ces symboles, le résultat s'accorde parfaitement avec l'autre obtenu sans leur intervention.

XXX.

Les opérations que nous avons faites dans notre Mémoire ne diffèrent pas au fond de celle qu'on vient de voir. En effet, après avoir posé le développement symbolique

$$\frac{F_2(x)}{F_1(x)} = \frac{F_2(a_1)}{f_1(a_1)\,F'_1(a_1)}\,\frac{f_1(x)}{x-a_1} + \frac{F_2(a_2)}{f_2(a_2)\,F'_1(a_2)}\,\frac{f_2(x)}{x-a_2} + \text{etc.}, \qquad (232)$$

nous avons trouvé

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{f_1(a_1)\,F'_1(a_1)}\,e^{x\Phi(a_1)} + \frac{F_2(a_2)}{f_1(a_2)\,F'_1(a_2)}\,e^{x\Phi(a_2)} + \text{etc.}; \qquad (233)$$

mais au lieu d'éliminer, à leur seul moyen, l'expression symbolique qui y entre, nous avons pris une troisième équation, afin d'arriver non seulement à un résultat exact (ce que les deux premières seulement auraient donné) mais convenable. Dans un des cas, nous avons pris

$$\frac{F_2(a_1)}{f_1(a_1)\,F'_1(a_1)}\,e^{x\Phi(a_1)} + \frac{F_2(a_2)}{f_1(a_2)\,F'_1(a_2)}\,e^{x\Phi(a_2)} + \text{etc.} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)e^{x\Phi\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)}}{f\left(\frac{1}{\chi\sqrt{-1}}\right)\chi^2}\,d\chi \qquad (234)$$

et ayant deux équations renfermant la même expression symbolique, nous l'avons éliminé, et nous sommes arrivés à l'équation (197), donnée dans les pages antérieures.

XXXI.

Ce n'est pas seulement dans les problèmes du genre de ceux que nous avons traités dans ce Mémoire que les suites divergentes peuvent être employées sans inconvénient. En effet, si vous remplacez une fonction quelconque $f(x)$ par une suite d'exponentielles, vous pouvez démontrer avec la plus grande facilité tous les théorèmes connus sur l'analogie des puissances et des différences, l'expression des différences en coefficients différentiels, ou vice versa des coefficients différentiels en différences finies, le théorème de Taylor, le théorème de Leibnitz, et généralement tous les théorèmes généraux d'Analyse. Il doit donc y avoir quelque chose de réel et de légitime dans l'emploi et l'usage qu'on fait des suites divergentes, quoiqu'on ne puisse pas tout-à-fait justifier leur emploi. Tout le monde sait et avoue facilement qu'il valait mieux s'en passer tout-à-fait; mais de l'autre côté on ne peut se résoudre à mettre absolument de côté le moyen le plus puissant de démonstration que possèdent les Mathématiques, et sur lequel, on peut le dire, tout leur édifice a été bâti.

Mais, on me dira que les suites divergentes peuvent conduire et conduisent, en effet, à des résultats fautifs, comment voulez-vous qu'on en fasse usage, comment distinguer les cas où les résultats auxquels nous sommes arrivés sont vrais de ceux où ils sont en défaut?

Premièrement je remarquerai que les suites divergentes n'ont jamais conduit à des résultats fautifs, tant qu'on ne leur applique aucune intégration définie. C'est avec un grand plaisir que je vois le savant professeur de Morgan, dans son traité de calcul diff. et int. que j'ai maintenant sous les yeux, partageant la même opinion, regarder avec d'autres géomètres les suites divergentes

XXXIII.

La solution que nous avons donnée dans ce Mémoire du problème (7) repose principalement, on peut même dire seulement, sur la possibilité à priori d'une équation de la forme

$$f(x) = H_1 F(x, a_1) + H_2 F(x, a_2) + H_3 F(x, a_3) + \text{etc.} \tag{247}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée de x; $F(x, a_n)$ une fonction, aussi donnée, de x et d'une racine quelconque a_n d'une certaine équation $f_1(x) = 0$, pris à volonté; H_1, H_2, H_3, etc., des constantes convenablement choisies.

Nous avons démontré la possibilité de cette équation: mais nous pourrions nous passer de toute démonstration, car tous les géomètres font tacitement usage ou admettent une telle proposition quoique en la voyant énoncée explicitement, ils s'en soient peut être révoltés.

En effet dans la théorie de la chaleur, quand il s'agit de déterminer la propagation de ce fluide dans les corps solides, dont deux dimensions sont très-petites relativement à la troisième, on a premièrement une équation de la forme

$$\frac{du}{dt} = P\frac{d^2u}{dx^2} + Qu; \tag{248}$$

et après les deux autres

$$\frac{du}{dx} + hu = 0, \text{ pour } x = l, \qquad \frac{du}{dx} + h'u = 0, \text{ pour } x = l'. \tag{249}$$

Après avoir trouvé une valeur pour u, satisfaisant à ces équations, il faut encore qu'on ait

$$u = {}_1f(x) \qquad \text{quand} \qquad t = 0. \tag{250}$$

On commence par faire, comme on le sait, d'après l'illustre auteur de la Théorie de la Chaleur,

$$u = e^{-\alpha t} X; \tag{251}$$

et on a, pour déterminer X et α les équations

$$P\frac{d^2X}{dx^2} + QX - \alpha X = 0, \tag{252}$$

et

$$\frac{dX}{dx} + hX = 0 \text{ pour } x = l, \qquad \frac{dX}{dx} + h'X = 0 \text{ pour } x = l'. \tag{253}$$

De ces équations on déduit une valeur pour X, renfermant une constante arbitraire et α, cette dernière quantité étant elle-même racine d'une certaine équation que je désignerai par

$$\tilde{\omega}(\alpha) = 0. \tag{254}$$

Désignant par α_1, α_2, α_3, etc., ses différentes racines et désignant par C_1X_1, C_2X_2, C_3X_3, etc., les valeurs correspondantes de X, on aura encore

$$u = C_1X_1e^{-\alpha_1 t} + C_2X_2e^{-\alpha_2 t} + C_3X_3e^{-\alpha_3 t} + \text{etc.}, \tag{255}$$

pour la valeur de u qui satisfait aux trois équations (248) et (249).

Après on détermine les constantes C_1, C_2, C_3, etc., pour la condition qu'on ait

$${}_1f(x) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \text{etc.} \tag{256}$$

quelque soit la fonction ${}_1f(x)$.

Cela posé, je remarque que si vous faites varier tous les éléments qui entrent dans le problème de la propagation de la chaleur ou seulement quelques-uns pour que l'équation (248) ne cesse pas d'être linéaire; cette équation, si on dispose de α arbitrairement, peut représenter telle équation du second ordre qu'on voudra; et comme d'ailleurs une fonction quelconque de x peut être toujours donnée par une équation différentielle linéaire du second ordre, il en résulte que X_n peut être censé représenter une fonction quelconque de x et α; ou, du moins, cette fonction peut avoir des formes très-générales et très-variées.

Mais dans d'autres branches de la physique mathématique, au lieu de l'équation générale (248) et des équations aux limites (249), on a d'autres formes d'équations générales, d'autres formes d'équations aux limites. Dans toutes ces questions on admet toujours une équation de la forme (256). Supposant que $\Phi(x, \alpha_n)$ soit le terme général de toutes les suites de la forme (256), regardées comme des cas particuliers d'une seule, il est clair que cette fonction peut représenter une fonction quelconque. Les équations aux limites des corps étant aussi quelconques, il en résulte que α_1, α_2, α_3, etc., peuvent être regardés comme les racines d'une équation quelconque générale. Il s'en suit, que tout le monde qui s'est occupé de physique mathématique admet à priori l'égalité (247) que nous avons admise au commencement de ce Mémoire.

On pourrait objecter que dans les théories physiques la variable x est renfermée entre des limites finies l, l', tandis que dans ce Mémoire elle est regardée comme ayant des valeurs quelconques comprises entre l'infini positif et l'infini négatif. On peut répondre à cela que si la proposition (247) est vrai pour des valeurs de x qui soient comprises entre les limites l, l' qui peuvent être aussi éloignées l'une de l'autre qu'on veut, la proposition aura aussi lieu quand ces limites deviendront infinies. D'ailleurs dans les théories physiques on suppose très-souvent que les corps aient des dimensions infinies, et, par conséquent, que la proposition dont il est ici question ait lieu pour toutes les valeurs possibles de la variable, comprises entre l'infini positif et l'infini négatif. (Voyez entre autres écrits la Théorie de la chaleur de Poisson.)

XXXIV.

Nous nous sommes appuyés jusqu'à présent sur les suites pour résoudre le problème de déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (7). Nous allons montrer maintenant comment on peut se passer de toute suite.

Pour cela, posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,\varphi_1(\omega\sqrt{-1})\,d\omega; \qquad (257)$$

$\Phi(\omega\sqrt{-1})$, $\varphi_1(\omega\sqrt{-1})$, étant deux fonctions inconnues qu'il s'agit de déterminer pour que l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x) \qquad (258)$$

soit satisfaite en adoptant l'expression précédente de $\varphi(x)$. Faisant la substitution, cette équation deviendra

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,\varphi_1(\omega\sqrt{-1})\,d\omega\int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,f(x,\theta)\,d\theta \;=\; F(x) \tag{259}$$

Déterminons $\Phi(\omega\sqrt{-1})$ par l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\omega\sqrt{-1},\theta)\,e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta} \;=\; 0; \tag{260}$$

et faisons, pour abréger,

$$(x-\omega\sqrt{-1})\,e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta \;=\; {}_1f(x,\omega\sqrt{-1}): \tag{261}$$

on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_1f(x,\omega\sqrt{-1})\,\varphi_1(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega \;=\; F(x). \tag{262}$$

Maintenant je remarque que l'équation (88) a lieu si la fonction renferme une constante indéterminée y: et comme cette constante peut être quelconque, l'équation doit encore subsister si on la suppose égale à x. C'est-à-dire que ayant démontré l'exactitude de l'équation

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y,\chi\sqrt{-1})}{x-\chi\sqrt{-1}}\,d\chi \;=\; \varphi(y,x), \tag{263}$$

on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x,\chi\sqrt{-1})}{x-\chi\sqrt{-1}}\,d\chi \;=\; \varphi(x,x) \tag{264}$$

en y faisant $y=x$.

Appliquant cette formule à l'équation (262), on aura

$${}_1f(x,x)\,\varphi_1(x) \;=\; F(x): \tag{265}$$

on en déduit

$$\varphi_1(x) \;=\; \frac{F(x)}{{}_1f(x,x)}; \tag{266}$$

l'équation (257) donne après

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,\frac{F(\omega\sqrt{-1})}{{}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})}\,d\omega \tag{267}$$

pour la valeur cherchée de $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (258).

Il faut observer que ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})$ étant la valeur de (261) quand on y fait $x=\omega\sqrt{-1}$, cette expression ne s'évanouit pas malgré le facteur $x-\omega\sqrt{-1}$, qui alors se réduit à zéro, parce que le facteur

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta \tag{268}$$

devient au même temps infini. ${}_1f(x,x)$ aura, par conséquent, toujours une valeur finie à moins que, par accident, toutes les racines de l'équation (260) ne soient égales; chose qui n'aura lieu que dans des cas

exceptionnels, et qu'on peut toujours éviter. Choisissant donc pour $\Phi(\omega\sqrt{-1})$ une racine simple de l'équation (260), la fonction ${}_1f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1})$ sera finie, et la solution précédente tout-à-fait juste, du moins dans les limites où la formule (88) subsiste, ce qui exige, comme nous l'avons vu, que la fonction $\varphi(x, x)$ soit telle qu'on ait $\varphi(\infty, x) = 0$.

XXXV.

Cette solution est pourtant fondée sur la possibilité de l'équation (260).

En général, l'équation (260) aura une racine et une racine simple. Mais si par accident, cela n'a pas lieu, en faisant $\varphi(x) = f_1(x)\,\psi(x)$, $f_1(x)$ étant une quantité dont on disposera arbitrairement et $\psi(x)$ une nouvelle inconnue, l'équation (7) prendra la forme

$$\int_\alpha^\beta f(x, \theta)\, f_1(x+\theta)\, \psi(x+\theta)\, d\theta = F(x); \tag{269}$$

et, procédant comme précédemment, on trouvera

$$\varphi(x) = \frac{f_1(x)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,\frac{F(\omega\sqrt{-1})}{{}_1f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1})}\,d\omega \tag{270}$$

pour déterminer $\varphi(x)$.

Dans cette équation $\varphi(x)$ est déterminé par

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta f(\omega\sqrt{-1}, \theta)\, f_1(\omega\sqrt{-1}+\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta} = 0: \tag{271}$$

et ${}_1f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1})$ par

$$(x-\omega\sqrt{-1})\, e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\int_\alpha^\beta f(x, \theta)\, f_1(x+\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\omega = {}_1f(x, \omega\sqrt{-1}), \tag{272}$$

quand on y fait $x = \omega\sqrt{-1}$.

Dans cette forme de solution, comme $f_1(\theta+x)$ est une quantité tout-à-fait arbitraire, on pourra en disposer pour que l'équation (271) ait toujours une racine et une racine simple. C'est une chose très-simple et très-facile.

XXXVI.

Comme on n'a pas encore donné une méthode pour résoudre les équations algébriques ou transcendentes, il faut montrer comment on peut tirer de l'équation (260) la valeur de $\Phi(\omega\sqrt{-1})$. Cela est d'autant plus nécessaire que les solutions en séries que nous avons données exigent aussi qu'on sache résoudre des équations transcendentes.

D'après le théorème de LAGRANGE, on sait qu'une racine de l'équation

$$z = \alpha + tf(z), \tag{272}$$

est donnée par la série

$$z = \alpha + \frac{t}{1} f(\alpha) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \frac{d \cdot f(\alpha)^2}{d\alpha} + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 \cdot f(\alpha)^3}{d\alpha^2} + \text{etc.} \tag{273}$$

Au moyen de la formule (88), cette série peut s'écrire comme suit:

$$z = \alpha - \frac{1}{2\pi} \int d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\alpha - \chi\sqrt{-1}]} \left[\frac{tf(\chi\sqrt{-1})}{[\alpha - \chi\sqrt{-1}]} - \frac{t^2 f(\chi\sqrt{-1})^2}{[\alpha - \chi\sqrt{-1}]^2} + \text{etc.} \right] d\chi, \tag{274}$$

ou

$$z = \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left[1 + \frac{tf(\chi\sqrt{-1})}{\alpha - \chi\sqrt{-1}} \right] d\chi \tag{275}$$

faisant la somme de la série qui se trouve dans la parenthèse, intégrant par rapport à α et déterminant la constante arbitraire d'après la condition qu'on ait $z = \alpha$ quand $t = 0$.

Si on fait maintenant

$$\alpha = 1, \qquad t = 1, \qquad f(z) = F(z, x) + z - 1, \tag{276}$$

dans cette équation, on aura

$$z = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{F(\chi\sqrt{-1}, x)}{1 - \chi\sqrt{-1}} d\chi, \tag{277}$$

pour représenter une racine de l'équation générale

$$F(z, x) = 0. \tag{278}$$

Il peut arriver que cette intégrale devienne infinie. Voici ce qu'on doit alors faire:

Le théorème de LAGRANGE déduit encore

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\omega}(\alpha) + \frac{t}{1} \tilde{\omega}'(\alpha) f(\alpha) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \frac{d \cdot [\tilde{\omega}'(\alpha) f(\alpha)^2]}{d\alpha} + \text{etc.}, \tag{279}$$

de la même équation (272). Sommant cette série comme la précédente, on aura

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\omega}(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left[1 + \frac{tf(\chi\sqrt{-1})}{\alpha - \chi\sqrt{-1}} \right] \tilde{\omega}'(\chi\sqrt{-1}) d\chi; \tag{280}$$

ou bien

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\omega}(1) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}'(\chi\sqrt{-1}) \log \frac{F(\chi\sqrt{-1}, x)}{\alpha - \chi\sqrt{-1}} d\chi; \tag{281}$$

si on fait, comme précédemment,

$$\alpha = 1, \qquad t = 1, \qquad f(z) = F(z, x) + z - 1. \tag{282}$$

Or, comme la fonction $\tilde{\omega}(z)$ est quelconque, on la choisira d'après la condition que l'intégrale du second membre de l'équation (281) ne devienne pas infinie, et qu'on puisse après résoudre facilement l'égalité

$$\tilde{\omega}(z) = F_1(x). \tag{283}$$

On pourra ordinairement prendre pour $\tilde{\omega}(z)$ une fonction de la forme

$$\frac{1}{(z+a)^n} \tag{284}$$

n étant un nombre positif.

De cette manière, on aura donc toujours une racine d'une équation quelconque algèbrique ou transcendente, moyennant une seule intégrale définie. On sait aussi que pour une valeur donnée de x, on a la plus petite des racines de (278). (Voyez LAGRANGE, Résolution des équations numériques.)

Mais si on fait $z = \frac{1}{n}$ dans l'équation (278), on aura

$$F\left(\frac{1}{n}, x\right) = 0; \tag{285}$$

et comme la plus petite racine de cette équation est la plus grande de l'autre, en déduisant la valeur de n, d'après la méthode que nous venons d'employer, on aura deux racines différentes de l'équation (278).

Dans chaque cas particulier on doit tâcher de résoudre l'équation (260) par des méthodes particulières, en s'aidant de la forme donnée de la fonction $f(\omega\sqrt{-1}, \theta)$ qui y entre: mais si cette équation est trop compliquée pour être résolue par des méthodes ordinaires, on le faira au moyen de la formule (277) ou bien (281). Si on fait usage de la première, on aura

$$\Phi(\omega\sqrt{-1}) = 1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{1}{(1-\chi\sqrt{-1})\int_{\alpha}^{\beta} f(\omega\sqrt{-1}, \theta)\, e^{\theta\chi\sqrt{-1}}\, d\theta}\, d\chi. \tag{286}$$

Si l'intégrale devient infinie, il faut alors faire usage de l'autre formule (281), ainsi que nous l'avons dit précédemment.

XXXVII.

Pour sommer les séries (273), (279), nous nous sommes appuyés sur la formule (88). On peut y arriver en faisant usage du théorème de FOURIER.

En effet, posant

$$f(\alpha)^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma(\alpha-\delta)\sqrt{-1}} f(\delta)^n\, d\gamma\, d\delta: \tag{287}$$

la première de ces séries prendra la forme

$$z = \alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma(\alpha-\delta)\sqrt{-1}}\left[\frac{t}{1} f(\delta) + \frac{t^2(\gamma\sqrt{-1})}{1\cdot 2} f(\delta)^2 + \frac{t^3(\gamma\sqrt{-1})^2}{1\cdot 2\cdot 3} f(\delta)^3 + \text{etc.}\right] d\gamma\, d\delta: \tag{288}$$

et cette équation se réduit à

$$z = \alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\gamma(\alpha-\delta)\sqrt{-1}}}{\gamma\sqrt{-1}} \left[e^{\gamma t f(\delta)\sqrt{-1}} - 1\right] d\gamma\, d\delta, \tag{289}$$

comme il est facile de le voir.

L'équation (279), en procédant de la même manière, se réduit à la forme

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\omega}(\alpha) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\gamma(\alpha-\delta)\sqrt{-1}}}{\gamma\sqrt{-1}}\,\tilde{\omega}'(\delta)\cdot[e^{\gamma\,{}^1f(\delta)\sqrt{-1}}-1]\,d\gamma\,d\delta. \qquad (290)$$

Si on détermine α, t et $f(z)$ par (276), ces formules exprimeront une racine z ou fonction quelconque de la même racine de l'équation (278), qui a l'apparence d'être plus générale que l'équation (272), qu'on dirait, de prime abord, une fonction particulière.

XXXVIII.

Montrons maintenant la concordance de la solution (267) avec celle que nous avons donnée dans le théorème I. Pour cela, mettons dans l'équation (267) au lieu de $F(x)$ ou $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ la suite (52); on aura

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{2\pi\,{}^1f(a_1)\,F_1(a_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}^1f(\omega\sqrt{-1})\,e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}}{(\omega\sqrt{-1}-a_1)\,{}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})}\,d\omega + \text{etc.}: \qquad (291)$$

mais comme les fonctions ${}^1f(\omega\sqrt{-1})$, ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})$, d'après les équations (53), (261) et les calculs du N° XXXIV sont égales et de signes contraires, cette équation prend la forme

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{2\pi\,{}^1f(a_1)\,F_1(a_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}}{a_1-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega + \text{etc.}: \qquad (292)$$

qui se réduit encore, d'après la formule (88), à

$$\varphi(x) = \frac{F_2(a_1)}{{}^1f(a_1)\,F_1(a_1)}\,e^{x\Phi(a_1)} + \frac{F_2(a_2)}{{}^1f(a_2)\,F_1(a_2)}\,e^{x\Phi(a_2)} + \text{etc.}: \qquad (293)$$

ce qui fait voir l'accord parfait de nos deux solutions.

Voilà encore un bel exemple de séries divergentes conduisant à des résultats qui sont très-justes.

XXXIX.

Dans les solutions précédentes il faut déterminer la valeur de ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})$ qui se présente sous une forme indéterminée. Dans chaque cas particulier ce problème n'offre aucune difficulté, puisqu'on sait comment trouver la valeur d'une telle expression. Mais comme dans plusieurs problèmes généraux on peut vouloir laisser à la fonction $f(x,\,\theta)$ toute sa généralité au lieu de considérer des cas particuliers, il est nécessaire de montrer comment on doit procéder pour transformer cette expression dans une autre ayant l'apparence finie.

En faisant, pour abréger

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\, d\theta} = {}_2f(x,\omega\sqrt{-1}), \tag{294}$$

on aura

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\, d\theta} = {}_2f(c,\omega\sqrt{-1}) + {}_2f'(c,\omega\sqrt{-1})\frac{(x-c)}{1} + {}_2f''(c,\omega\sqrt{-1})\frac{(x-c)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.} \tag{295}$$

et la valeur de ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})$ deviendra

$$\frac{e^{\omega\Phi(\omega\sqrt{-1})\sqrt{-1}}}{{}_2f'(c,\omega\sqrt{-1}) + {}_2f''(c,\omega\sqrt{-1})\frac{(\omega\sqrt{-1}-c)}{1} + f'''(c,\omega\sqrt{-1})\frac{(\omega\sqrt{-1}-c)^2}{1\cdot 2} + \text{etc.}} : \tag{296}$$

dans ces équations c est une constante arbitraire.

Quoique la série du dénominateur soit égale à la valeur que prend

$$\frac{d\cdot}{dx}\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\, d\theta}, \tag{297}$$

quand on y fait $x = \omega\sqrt{-1}$, on ne doit pas pourtant la remplacer par cette quantité parce qu'elle se réduirait à

$$-\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f'(x,\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\, d\theta}{\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\, e^{\theta\Phi(\omega\sqrt{-1})}\, d\theta\right]^2}; \tag{298}$$

qui eu égard à l'équation (260), donne à la fraction ci-dessus la forme d'une quantité infinie ; mais tâcher de mettre ${}_2f^{(n)}(c,\omega\sqrt{-1})$ sous une forme convenable pour que la fonction génératrice de la suite n'ait pas l'apparence d'une quantité indéterminée.

En vertu de la formule (88), l'équation (295) se transforme en celle-ci

$${}_2f(x,\omega\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_2f(\chi\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})}{c-\chi\sqrt{-1}}\left[1 - \frac{x-c}{c-\chi\sqrt{-1}} + \frac{(x-c)^2}{(c-\chi\sqrt{-1})^2} - \text{etc.}\right] d\chi. \tag{299}$$

Différentiant cette équation et faisant après $x = \omega\sqrt{-1}$, on aura

$$\left[\frac{d\cdot {}_2f(x,\omega\sqrt{-1})}{dx}\right]_{x=\omega\sqrt{-1}} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_2f(\chi\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})}{(c-\chi\sqrt{-1})^2}\frac{1}{\left(1-\frac{c-\omega\sqrt{-1}}{c-\chi\sqrt{-1}}\right)^2} d\chi; \tag{300}$$

ou bien

$$\left[\frac{d\cdot {}_2f(x,\omega\sqrt{-1})}{dx}\right]_{x=\omega\sqrt{-1}} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_2f(\chi\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})}{(\omega\sqrt{-1}-\chi\sqrt{-1})^2} d\chi, \tag{301}$$

faisant attention à ce que

$$1 + \frac{2(c-\omega\sqrt{-1})}{(c-\chi\sqrt{-1})} + \frac{3(c-\omega\sqrt{-1})^2}{(c-\chi\sqrt{-1})} + \text{etc.} = \frac{1}{\left(1-\frac{c-\omega\sqrt{-1}}{c-\chi\sqrt{-1}}\right)^2}. \tag{302}$$

L'équation (301) pourrait être déduite directement de la formule (88). La valeur de ${}_1f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1})$ est donnée définitivement par

$${}_1f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1}) = -\frac{2\pi e^{\omega\Phi(\omega\sqrt{-1})\sqrt{-1}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_2f(\chi\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1})}{(\omega\sqrt{-1}-\chi\sqrt{-1})^2} d\chi}: \tag{303}$$

c'est-à-dire sous une forme finie.

Dans les cas où la formule (88) ne pourra pas s'appliquer, on peut faire usage du théorème de FOURIER.

XL.

La méthode du N° XXXIV peut être présentée sous beaucoup de formes différentes.

En effet, au lieu de prendre pour $\varphi(x)$ l'expression du second membre de l'équation (257), on peut faire

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega\sqrt{-1})}{x-\Phi(\omega\sqrt{-1})} d\omega. \tag{304}$$

L'équation (258) se transformera en

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\omega\sqrt{-1})\, d\omega \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x,\theta)}{x+\theta-\Phi(\omega\sqrt{-1})} d\theta = F(x). \tag{305}$$

Faisant

$$(x-\omega\sqrt{-1})\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x,\theta)}{x+\theta-\Phi(\omega\sqrt{-1})} d\theta = {}_1f(x, \omega\sqrt{-1}), \tag{306}$$

l'équation précédente se réduira à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_1f(x, \omega\sqrt{-1})\,\varphi_1(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}} d\omega = F(x). \tag{307}$$

La formule (257) transforme cette équation en

$${}_1f(x,x)\,\varphi_1(x) = F(x); \tag{308}$$

et l'expression qu'on en déduira pour $\varphi_1(x)$ sera finie, si on détermine $\Phi(\omega\sqrt{-1})$ par l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\omega\sqrt{-1}, \theta)}{\omega\sqrt{-1}+\theta-\Phi(\omega\sqrt{-1})} d\theta} = 0. \tag{309}$$

On aura alors pour $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega\sqrt{-1})}{f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1})\,[x - \Phi(\omega\sqrt{-1})]} d\omega. \tag{310}$$

Au lieu de prendre pour $\varphi(x)$ la fonction (304), on pourra adopter cette forme plus générale

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x, \Phi[\omega\sqrt{-1}])\,\varphi_1(\omega\sqrt{-1})\,d\omega; \tag{311}$$

$F_1(x, \Phi[\omega\sqrt{-1}])$ étant une fonction de x et $\Phi(\omega\sqrt{-1})$ prise à volonté, ou du moins à laquelle on peut attribuer des formes extrêmement variées.

Continuant la solution, comme précédemment, on disposera après de cette fonction pour qu'on puisse facilement trouver la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, F_1(x+\theta, \Phi[\omega\sqrt{-1}])\, d\theta, \tag{312}$$

et, par conséquent, résoudre facilement l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta, \omega\sqrt{-1})\, F_1[\theta + \omega\sqrt{-1}, \Phi(\omega\sqrt{-1})]\, d\theta} = 0. \tag{313}$$

Quoiqu'on puisse donner à la fonction F_1 des formes extrêmement variées, on ne peut pas pourtant les prendre à discrétion: il y en a quelques-unes qu'on doit rejeter. Ainsi si la fonction $\varphi(x)$ ne s'évanouit pas pour $x = \pm\infty$, il est bien clair qu'on ne pourra pas donner à cette fonction la forme

$$\frac{1}{x - \Phi(\omega\sqrt{-1})}; \tag{314}$$

mais au lieu de chercher quelles sont les formes qu'on peut donner à F_1 ou bien celles qu'on doit exclure, il vaut mieux ne pas s'inquiéter de cela, mais prendre la forme qu'on jugera la plus convenable pour les calculs, parceque s'il y en a quelque incompatibilité la suite de ces mêmes calculs le fera voir.

XLI.

La méthode que nous avons donnée au commencement du numéro précédent conduit le plus souvent, quand elle peut s'appliquer à des calculs plus simples que ceux qui résultent de celle qui a été donnée au N° XXXIV.

Supposons, pour donner un exemple, que α et β soient respectivement égaux à l'infini positif, et à l'infini négatif, et à la place de $f(x, \theta)$, mettons $\frac{1}{f(x, \theta)}$ dans l'équation proposée: elle deviendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+\theta)}{f(x, \theta)}\, d\theta = F(x). \tag{315}$$

Prenant pour $\varphi(x)$ l'expression (304), l'équation (306) deviendra, dans le cas actuel,

$$(x-\omega\sqrt{-1})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f(x,\theta)\,[x+\theta-\Phi(\omega\sqrt{-1})]}\,d\theta \;=\; {}_1f(x,\omega\sqrt{-1}).$$

Mais l'intégrale définie qui entre ici pouvant s'écrire comme suit

$$-\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{f\left(x,\frac{\theta\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\right)\,[\Phi(\omega\sqrt{-1})\sqrt{-1}-x\sqrt{-1}-\theta\sqrt{-1}]}\,d\theta,$$

se transforme en

$$\frac{-\sqrt{-1}}{f\left[x,\frac{\Phi(\omega\sqrt{-1})\sqrt{-1}-x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\right]},$$

en vertu de la formule (88).

On aura alors

$$\frac{-(x-\omega\sqrt{-1})\sqrt{-1}}{f[x,\Phi(\omega\sqrt{-1})-x]} \;=\; {}_1f(x,\omega\sqrt{-1});$$

et, par conséquent,

$$\frac{-\sqrt{-1}}{(f[x,\Phi(\omega\sqrt{-1})-x])'_{x=\omega\sqrt{-1}}} \;=\; {}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1});$$

désignant par

$$(f[x,y])'_{x=y}$$

la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à x, quand on y fait $x=y$.

L'équation (309) qui détermine $\Phi(\omega\sqrt{-1})$ deviendra

$$f[\omega\sqrt{-1},\Phi(\omega\sqrt{-1})-\omega\sqrt{-1}] \;=\; 0.$$

Si, pour particulariser un peu plus les calculs, on fait

$$f(x,\theta) \;=\; f_1(x)-f_2(\theta);$$

on aura

$${}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1}) \;=\; -\frac{\sqrt{-1}}{f'_1(\omega\sqrt{-1})+f'_2[\Phi(\omega\sqrt{-1})-\omega\sqrt{-1}]},$$

et

$$f_1(\omega\sqrt{-1})-f_2[\Phi(\omega\sqrt{-1})-\omega\sqrt{-1}] \;=\; 0.$$

Cette dernière équation donne

$$\Phi(\omega\sqrt{-1}) \;=\; \omega\sqrt{-1}+f_2^{-1}[f_1(\omega\sqrt{-1})],$$

f_2^{-1} étant une caractéristique de fonction telle qu'on ait $f_2^{-1}\cdot f_2(x)=x$.

Au moyen de cette valeur de $\Phi(\omega\sqrt{-1})$, on aura

$${}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1}) \;=\; -\frac{\sqrt{-1}}{f'_1(\omega\sqrt{-1})+f'_2[f_2^{-1}(f_1[\omega\sqrt{-1}])]},$$

et l'équation (340) donnera

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega\sqrt{-1})}{[f_1(\omega\sqrt{-1}+f_2[f_2^{-1}[f_1(\omega\sqrt{-1})]](\omega\sqrt{-1}+f_2^{-1}[f_1(\omega\sqrt{-1})]-x)}\,d\omega, \quad (346)$$

pour la valeur de la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (345).

XLII.

La solution que nous avons donnée de l'équation (7) dans le N° XXXIV suppose que la fonction ${}_1f(x, \omega\sqrt{-1})$ devienne toujours finie pour $x = \omega\sqrt{-1}$. Dans le N° XXXV on a déjà montré ce qu'on doit faire quand cela par accident n'a pas lieu.

Voici un autre moyen d'arriver au même résultat.

Au lieu de prendre pour $\varphi(x)$ l'expression (257), prenons celle-ci

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi_1(\omega\sqrt{-1}) + x^2{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})}\varphi_1(\omega\sqrt{-1})\,d\omega, \quad (347)$$

ou $\Phi_1, {}_1\Phi, \varphi_1$ sont trois fonctions à déterminer.

Mettant cette valeur de $\varphi(x)$ dans l'équation (258), on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_1f(x, \omega\sqrt{-1})\,\varphi_1(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega = F(x), \quad \text{d'où} \quad {}_1f(x,x)\,\varphi_1(x) = F(x), \quad (348)$$

si l'on fait, pour abréger,

$$(x-\omega\sqrt{-1})\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,e^{(x+\theta)\Phi_1(\omega\sqrt{-1}) + (x+\theta)^2{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta = {}_1f(x, \omega\sqrt{-1}). \quad (349)$$

Faisant l'intégrale qui entre dans cette équation égale à

$$\frac{1}{{}_2f(x, \omega\sqrt{-1})}, \quad (350)$$

on déterminera prémièrement une des fonctions $\Phi_1, {}_1\Phi$ par l'équation

$${}_2f(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1}) = 0: \quad (351)$$

et pour que la fonction

$$\frac{x-\omega\sqrt{-1}}{{}_2f(x, \omega\sqrt{-1})} \quad (352)$$

soit certainement finie, nous supposerons que sa dérivée par rapport à x, quand on y fait $x = \omega\sqrt{-1}$, soit égale à une certaine fonction finie $F_1(\omega\sqrt{-1})$; c'est-à-dire qu'on ait

$$\left[\frac{d\cdot{}_2f(x, \omega\sqrt{-1})}{dx}\right]_{x=\omega\sqrt{-1}} = F_1(\omega\sqrt{-1}). \quad (353)$$

Il est toujours permis de poser cette égalité [où on peut prendre la fonction $F_1(\omega\sqrt{-1})$ à volonté]

à cause de la fonction arbitraire Φ_1 ou bien ${}_1\Phi$ qui y entre. Les deux équations (321), (323) déterminent Φ_1 et ${}_1\Phi$; et la fonction (319) devenant nécessairement finie quand on y fait $x = \omega\sqrt{-1}$, la fonction $\varphi_1(x)$ le sera également: l'égalité (317) donne après la solution définitive du problème proposé.

XLIII.

Les méthodes que nous venons de donner, fondées sur les intégrales définies, pour résoudre l'équation (7), peuvent s'appliquer très-facilement à la résolution de l'équation plus générale (186), et cela se fait si facilement que je crois inutile d'en faire le calcul. Les mêmes méthodes peuvent s'appliquer à la détermination simultanée de plusieurs fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc., entrant dans des équations linéaires de la forme (7). Pour le faire voir, prenons un exemple.

Soient les équations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1(x,\theta)\,\varphi_1(x+\theta)\,d\theta + \int_{{}_1\alpha}^{{}_1\beta} {}_1f(x,\theta)\,\varphi_2(x+\theta)\,d\theta = F_1(x), \tag{324}$$

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(x,\theta)\,\varphi_1(x+\theta)\,d\theta + \int_{{}_2\alpha}^{{}_2\beta} {}_2f(x,\theta)\,\varphi_2(x+\theta)\,d\theta = F_2(x). \tag{325}$$

Posons

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi_1(\omega\sqrt{-1}) + x^2\,{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,{}_1\varphi(\omega\sqrt{-1})\,d\omega, \tag{326}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi_2(\omega\sqrt{-1}) + x^2\,{}_2\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,{}_2\varphi(\omega\sqrt{-1})\,d\omega; \tag{327}$$

${}_1\varphi(x)$, ${}_2\Phi(x)$ sont deux nouvelles fonctions qui viennent remplacer les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$; Φ_1, ${}_1\Phi$, Φ_2, ${}_2\Phi$ quatre autres fonctions dont nous allons disposer pour faciliter la solution des équations proposées.

Au moyen de ces expressions de $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les équations précédentes deviendront

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Xi_1(x,\omega\sqrt{-1})\,{}_1\varphi(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_1\Xi(x,\omega\sqrt{-1})\,{}_2\varphi(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega = F_1(x), \tag{328}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Xi_2(x,\omega\sqrt{-1})\,{}_1\varphi(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_2\Xi(x,\omega\sqrt{-1})\,{}_2\varphi(\omega\sqrt{-1})}{x-\omega\sqrt{-1}}\,d\omega = F_2(x), \tag{329}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}
(x-\omega\sqrt{-1})\left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{(x+\theta)\Phi_1(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})} f_1(x,\theta)\,d\theta\right] &= \Xi_1(x,\omega\sqrt{-1}),\\
(x-\omega\sqrt{-1})\left[\int_{{}_1\alpha}^{{}_1\beta} e^{(x+\theta)\Phi_2(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_2\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,{}_1f(x,\theta)\,d\theta\right] &= {}_1\Xi(x,\omega\sqrt{-1}),\\
(x-\omega\sqrt{-1})\left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{(x+\theta)\Phi_1(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})} f_2(x,\theta)\,d\theta\right] &= \Xi_2(x,\omega\sqrt{-1}),\\
(x-\omega\sqrt{-1})\left[\int_{{}_2\alpha}^{{}_2\beta} e^{(x+\theta)\Phi_2(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_2\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,{}_2f(x,\theta)\,d\theta\right] &= {}_2\Xi(x,\omega\sqrt{-1}),
\end{aligned}\right\} \quad (330)$$

Ces équations, en vertu de la formule (88), peuvent se transformer en celles-ci

$$-\Xi_1(x,x)\,{}_1\varphi(x)+{}_1\Xi(x,x)\,{}_2\varphi(x)=F_1(x),\quad \Xi_2(x,x)\,{}_1\varphi(x)+{}_2\Xi(x,x)\,{}_2\varphi(x)=F_2(x), \quad (331)$$

qui donnent tout de suite les valeurs des fonctions cherchées ${}_1\varphi(x)$, ${}_2\varphi(x)$.

Cette solution suppose que chaqu'une des fonctions

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{(x+\theta)\Phi_1(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})} f_1(x,\theta)\,d\theta},\\
&\frac{1}{\int_{{}_1\alpha}^{{}_1\beta} e^{(x+\theta)\Phi_2(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_2\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,{}_1f(x,\theta)\,d\theta},\\
&\frac{1}{\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{(x+\theta)\Phi_1(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_1\Phi(\omega\sqrt{-1})} f_2(x,\theta)\,d\theta},\\
&\frac{1}{\int_{{}_2\alpha}^{{}_2\beta} e^{(x+\theta)\Phi_2(\omega\sqrt{-1})+(x+\theta)^2\,{}_2\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,{}_2f(x,\theta)\,d\theta},
\end{aligned}\right\} \quad (332)$$

soit divisible par $x-\omega\sqrt{-1}$.

Pour satisfaire à cette condition on n'a qu'à faire dans ces fonctions $x=\omega\sqrt{-1}$ et les égale après à zéro: on aura quatre équations, renfermant quatre inconnues Φ_1, ${}_1\Phi$, Φ_2, ${}_2\Phi$, qu'on pourra facilement résoudre suivant la méthode du N° XXXVI. La première et la troisième donneront Φ_1, ${}_1\Phi$; la seconde et la quatrième Φ_2 et ${}_2\Phi$.

XLIV.

Nous avons donné plusieurs méthodes pour résoudre l'équation (7); mais toutes ces différentes méthodes ne nous ont conduit qu'à des solutions particulières de ce problème. Allons maintenant faire voir comme on peut les rendre plus générales.

Pour cela, faisons

$$\varphi(x)=\psi_1(x)+{}_1\psi(x): \quad (333)$$

l'équation (7) deviendra

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,\psi_1(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,{}_1\psi(x+\theta)\,d\theta = F(x); \tag{334}$$

mais comme une des fonctions $\psi_1(x)$, ${}_1\psi(x)$ peut être prise arbitrairement, posons

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,\psi_1(x+\theta)\,d\theta = F(x); \tag{335}$$

l'équation précédente se réduira à

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,{}_1\psi(x+\theta)\,d\theta = 0. \tag{336}$$

L'équation (335), ayant la forme de l'équation (7), peut être traitée par les méthodes données antérieurement: laissons-la donc de côté pour ne nous occuper que de l'équation (336).

Faisons

$${}_1\psi(x) = \Psi(x) + {}_1F(x): \tag{337}$$

elle deviendra

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,\Psi(x+\theta)\,d\theta = F_1(x), \tag{338}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,{}_1F(x+\theta)\,d\theta = F_1(x). \tag{339}$$

L'équation précédente ayant la forme de l'équation (7) peut être aussi traitée par les différentes méthodes qui nous avons données. Faisant usage de celle du N° XXXIV, on aura

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\,\Phi_n(\omega\sqrt{-1})}\,\frac{F_1(\omega\sqrt{-1})}{{}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})}\,d\omega, \tag{340}$$

si l'on détermine ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})$ par la fonction

$${}_1f(x,\omega\sqrt{-1}) = (x-\omega\sqrt{-1})\,e^{x\,\Phi_n(\omega\sqrt{-1})}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,e^{\theta\,\Phi_n(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta, \tag{341}$$

quand on y fait $x=\omega\sqrt{-1}$; et si l'on suppose que $\Phi_n(\omega\sqrt{-1})$ soit une des racines $\Phi_1(\omega\sqrt{-1})$, $\Phi_2(\omega\sqrt{-1})$, $\Phi^3(\omega\sqrt{-1})$ etc. de l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\omega\sqrt{-1},\theta)\,e^{\theta\,\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,d\theta} = 0; \tag{342}$$

résolue par rapport à $\Phi(\omega\sqrt{-1})$.

Connaisant $\Psi(x)$, l'équation (337) donne

$${}_1\psi(x) = {}_1F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\,\Phi_n(\omega\sqrt{-1})}\,\frac{F_1(\omega\sqrt{-1})}{{}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})}\,d\omega \tag{343}$$

pour la fonction ${}_1\psi(x)$ qui satisfait à l'équation (336). Si nous donnons maintenant à n la suite des valeurs 1, 2, 3, etc. [ce qui revient à y mettre successivement au lieu de $\Phi_n(\omega\sqrt{-1})$ toutes les

racines de l'équation (342)], nous aurons autant de valeurs pour ${}_1\psi(x)$, toutes satisfaisant à l'équation (336). Chaqu'une de ces expressions multipliée par une constante la satisfera également, et d'après la forme linéaire de cette équation, leur somme en sera encore une solution.

Réunissant cette valeur de ${}_1\psi(x)$ à celle de $\psi_1(x)$, donnée par l'équation (335), on aura, eu égard à l'égalité (333),

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi(\omega\sqrt{-1})}\,\frac{F(\omega\sqrt{-1})}{{}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})}\,d\omega \;+$$

$$\Sigma\, C_n\left[F_1(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi_n(\omega\sqrt{-1})}\,\frac{F_1(\omega\sqrt{-1})}{{}^1f(\omega\sqrt{-1},\,\Phi_n[\omega\sqrt{-1}])}\,d\omega\right], \qquad (344)$$

pour la valeur de $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation proposée (7).

Dans l'intégrale entrant sous le signe sommatoire Σ nous avons remplacé la fonction ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})$ par

$${}^1f(\omega\sqrt{-1},\,\Phi_n[\omega\sqrt{-1}]) \qquad (345)$$

pour faire mieux sentir que cette fonction renferme $\Phi_n(\omega\sqrt{-1})$; C_n est une fonction de n, et ${}_1f(\omega\sqrt{-1},\,\omega\sqrt{-1})$ est déterminé par la fonction (261) quand on y fait $x = \omega\sqrt{-1}$.

XLV.

Nous nous trouvons maintenant en état de résoudre une foule de problèmes, qui tous peuvent se réduire à la forme (7) ou bien (141); mais au lieu de traiter des questions particulières de géométrie ou de mécanique, nous nous occuperons de problèmes généraux d'analyse qui les comprennent comme des cas particuliers. Cependant nous ne pousserons ces solutions plus loin que ce qu'il en faut pour montrer que le problème proposé dépend de la solution d'une équation de la forme (7) ou d'une autre qui lui soit équivalente.

Problème I. Déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$f(x,0)\,\varphi(x) + f(x,1)\,\frac{d\varphi(x)}{dx} + f(x,2)\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} = F(x). \qquad (346)$$

Solution. Si l'équation précédente est d'un ordre infini, elle est de la forme (32) et sa solution se trouve dans le N° VI. La seule différence est que $f(x,n)$ n'étant pas réduit à la forme (24), on a la série

$$f(x,0) + f(x,1)\,m + f(x,2)\,m^2 + \text{etc.} \qquad (347)$$

à sommer; chose qu'on peut pourtant faire d'après les méthodes que nous avons indiquées dans les pages antérieures. Mais si l'équation (346) est d'un ordre fini, cette méthode n'est pas applicable, à moins qu'on ne la fasse dépendre d'une autre équation satisfaisant à cette condition.

Mais qu'elle soit d'un ordre fini ou non, on pourra dans tous les cas suivre la méthode suivante: Posons

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta x}\,\psi(\theta)\,d\theta; \qquad (348)$$

α et β étant des constantes, et $\psi(\theta)$ une fonction de θ à déterminer. Il est toujours permis de poser cette équation. L'équation (346) deviendra

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta x} f_1(x, \theta)\psi(\theta)\, d\theta = F(x), \tag{349}$$

si l'on fait, pour abreger,

$$f(x, 0) + f(x, 1)\theta + f(x, 2)\theta^2 + \text{etc.} = f_1(x, \theta). \tag{350}$$

Si l'on pose maintenant $\theta = x + \theta$, cette équation prendra de suite la forme (7). Les limites de l'intégrale deviendront à la vérité variables, mais nous avons vu que cela n'alterait aucunement les méthodes exposées.

On doit faire, comme nous l'avons précédemment indiqué, $\psi(x) = f_2(x)\Psi(x)$, $f_2(x)$ étant une fonction dont on disposera pour que l'équation

$$\frac{1}{\int_{\alpha-\omega\sqrt{-1}}^{\beta-\omega\sqrt{-1}} e^{\theta(\theta+\omega\sqrt{-1})} e^{m_n\theta} f_1(\omega\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1}+\theta)\, d\theta} = 0 \tag{351}$$

ait plusieurs racines.

La fonction $\Psi(x)$ ou $\psi(x)$ connue, l'équation (348) donnera $\varphi(x)$, qui est la quantité dont on demande la valeur.

Il vaut très-souvent mieux de prendre pour $\varphi(x)$ l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega\sqrt{-1})}{x - \omega\sqrt{-1}}\, d\omega; \tag{352}$$

ce qui est permis, en vertu de la formule (88).

Ici quand on a déterminé la fonction qui entre sous le signe d'intégration on a tout de suite la fonction cherchée $\varphi(x)$ en remplaçant $\omega\sqrt{-1}$ par x; tandis qu'en employant l'expression du second membre de l'équation (348) il faut encore exécuter une intégration pour obtenir $\varphi(x)$.

La formule (88) suppose pourtant que $\varphi(x)$ se réduise à zéro quand x devient infiniment grand, et par conséquent semble ne pouvoir pas s'appliquer à l'intégration d'une équation quelconque. Mais on obvie le plus souvent à cet inconvénient de la manière suivante. On pose

$$\varphi(x) = e^{(hx)^n}\psi(x); \tag{353}$$

et supposant que n soit suffisamment grand, il est clair que la nouvelle fonction $\psi(x)$ sera telle qu'on aura $\psi(\infty) = 0$.

On pourra aussi, si l'on veut, faire usage de la formule de Fourier.

Voici un autre moyen de déterminer les intégrales particulières de l'équation (346).

Si la fonction $F(x)$ du second membre de cette équation se réduisait à zéro, c'est-à-dire, si l'on demandait qu'elle est la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$f(x, 0)\varphi(x) + f(x, 1)\frac{d\varphi(x)}{dx} + f(x, 2)\frac{d^2\cdot\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} = 0, \tag{354}$$

on poserait toujours les égalités (348) et (350), et on aurait

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta x} f_1(x, \theta)\psi(\theta)\, d\theta = 0, \tag{355}$$

pour transformée de l'équation précédente.

Cela posé, en vertu des calculs du N° XLIV, on peut facilement trouver une fonction de x de la forme

$$\psi(x) = {}_1F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi_n(\omega\sqrt{-1})}\frac{F_1(\omega\sqrt{-1})}{{}_1f(\omega\sqrt{-1},\omega\sqrt{-1})}\,d\omega, \qquad (356)$$

satifaisant à cette équation. Cette fonction [où l'on désigne par $\Phi_n(\omega\sqrt{-1})$ une racine de l'équation (351)] est une intégrale particulière de l'équation (354). Si on remplace $\Phi_n(\omega\sqrt{-1})$ successivement par d'autres racines $\Phi_1(\omega\sqrt{-1})$, $\Phi_2(\omega\sqrt{-1})$, etc. de la même équation (351), on aura autant d'intégrales particulières de l'équation (354). En prenant n racines et multipliant chacune des n fonctions de la forme (356) qu'on obtient par une constante arbitraire, faisant leur somme, on aura l'intégrale générale de l'équation proposée, si cette équation est de l'ordre n.

Si l'équation (351) était trop compliquée pour qu'on pût la résoudre par les méthodes ordinaires, il faudrait faire usage de celle qui a été donnée au N° XXXVI. Mais alors on ne peut pas déterminer n racines de cette équation; nous n'en savons que trouver deux. Pour avoir dans ce cas l'intégrale générale de l'équation (354), on commencerait par trouver deux de ses intégrales particulières, et à leur moyen on baisserait de deux unités l'ordre de la proposée; on aurait une équation de l'ordre $n-2$, dont on trouverait deux intégrales particulières: on aurait une nouvelle équation de l'ordre $n-4$. En suivant la même marche on arriverait à une équation du premier ou du second ordre, qu'on intégrerait, dans le premier cas en suivant les méthodes ordinaires, dans le second en éxécutant une nouvelle transformation. On sait après comment remonter a l'intégrale générale de la proposée.

Voici une autre manière de déterminer les intégrales particulières de cette équation. On fera

$$\varphi(x) = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \text{etc.}, \qquad (357)$$

et au lieu de $\varphi(x)$ on mettra cette série dans l'équation proposée, après lui avoir donné la forme

$${}_1f(0,x)\varphi(x) + {}_1f(1,x)\,x\frac{d\varphi(x)}{dx} + {}_1f(2,x)\,x^2\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} = 0 \qquad (358)$$

[où ${}_1f(0,x)$, ${}_1f(1,x)$, ${}_1f(2,x)$, etc. sont polynomes algébriques rationnels et entiers dont le degré est fini ou infini].

Egalant maintenant à zéro les coefficients des différentes puissances de x, on déterminera facilement m_2, m_3, etc. en fonction de m_1, et pour m_1 on aura une équation algébrique dont le degré est égal à l'ordre de l'équation proposée. Pour déterminer a_1, a_2, a_3, etc. on aura une équation aux différences finies dont l'ordre est égal au degré du plus grand des polynomes ${}_1f(0,x)$, ${}_1f(1,x)$, ${}_1f(2,x)$, etc. On verra plus bas comment il est possible de résoudre une telle équation ou trouver une valeur particulière qui la satisfasse. Supposons cela fait; on aura pour a_n une certaine fonction de n que nous désignerons par

$$a_n = {}_2f(n, m_1). \qquad (359)$$

En y mettant à la place de m_1 ses différentes valeurs, on aura autant de valeurs pour a_n. La suite (357) donne après un nombre égal de valeurs pour $\varphi(x)$, valeurs qui sont des intégrales particulières de l'équation proposée (354): multipliant chacune par une constante arbitraire et leur faisant la somme on aura son intégrale générale.

XLVI.

Problème II. Quelle est la fonction y_x qui satisfait à l'équation

$$f(0,x)\,y_x + f(1,x)\,y_{x+1} + f(2,x)\,y_{x+2} + \text{etc.} = F(x)\,? \tag{360}$$

ou bien à l'équation

$$f(0,x)\,y_x + f(1,x)\,\Delta y_x + f(2,x)\,\Delta^2 y_x + \text{etc.} = F(x)\,? \tag{361}$$

Solution. Si ces équations sont d'ordre infini on suivra la méthode du N° VI: mais si elles sont d'ordre fini celle du N° précédent.

XLVII.

Problème III. Quelle est la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\left.\begin{aligned} {}_0f_0(x)\,\varphi(x) + {}_0f_1(x)\,\frac{d\varphi(x)}{dx} + {}_0f_2(x)\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} \\ + {}_1f_0(x)\,\Delta\varphi(x) + {}_1f_1(x)\,\frac{d\Delta\varphi(x)}{dx} + \text{etc.} \\ + {}_2f_0(x)\,\Delta^2\varphi(x) + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = F(x)\,? \tag{362}$$

Solution. On n'a qu'à suivre ce qu'on a dit dans le N° précédent.

XLVIII.

Dans les deux derniers N^{os} x, dans les fonctions $y_x, \varphi(x)$, variait d'une manière uniforme. Cela n'arrive pas toujours dans tous les problèmes que l'on puisse se proposer; cependant la marche à suivre pour résoudre des questions de ce genre ne diffère presque pas de celle que nous venons de tracer, comme on peut le voir par le problème suivant que nous allons traiter.

Problème IV. Quelle est la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'égalité

$$f_1(0,x)\,\varphi[f(0,x)] + f_1(1,x)\,\varphi[f(1,x)] + f_1(2,x)\,\varphi[f(2,x)] + \text{etc.} = F(x)\,? \tag{363}$$

Solution. En prenant pour $\varphi(x)$ l'intégrale du second membre de l'équation (348), on aura

$$\int_\alpha^\beta f_2(\theta,x)\,\psi(\theta)\,d\theta = F(x); \tag{364}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$f_2(\theta,x) = f_1(0,x)\,e^{\theta f(0,x)} + f_1(1,x)\,e^{\theta f(1,x)} + \text{etc.} \tag{365}$$

L'équation (364) ayant la forme (7), on pourra, procédant comme dans les pages antérieures, déterminer facilement $\psi(x)$, et, par conséqnent, $\varphi(x)$.

Si l'on fait $\theta = \omega + x$, et on développe $\psi(\omega + x)$ suivant les puissances ascendentes de x, on aura

$$f_3(0,x)\psi(x) + f_3(1,x)\psi'(x) + f_3(2,x)\psi''(x) + \text{etc.} = F(x), \qquad (366)$$

pour transformée de l'équation (363), en y faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_{\alpha-x}^{\beta-x} f_2(\omega+x,x)\,\omega^n d\omega = f_3(n,x). \qquad (367)$$

Si, au lieu de l'intégrale du second membre de l'équation (348), on avait pris celle qui se trouve dans la formule (88), pour exprimer la valeur de la fonction $\varphi(x)$, en faisant, pour abréger,

$$2\pi f_2(\theta,x) = \frac{f_1(0,x)}{f(0,x)-\theta\sqrt{-1}} + \frac{f_1(1,x)}{f(1,x)-\theta\sqrt{-1}} + \text{etc.}, \qquad (368)$$

$$\frac{(\sqrt{-1})^n}{\Gamma(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty} f_2\left(\frac{x}{\sqrt{-1}}+\omega,x\right)\omega^n\,d\omega = f_3(n,x), \qquad (369)$$

on aurait encore trouvé

$$f_3(0,x)\varphi(x) + f_3(1,x)\varphi'(x) + f_3(2,x)\varphi''(x) + \text{etc.} = F(x), \qquad (370)$$

pour transformée de l'équation (363); transformée remarquable en ce que l'on a la même fonction $\varphi(x)$ pour variable principale.

XLIX.

Problème V. Quelles valeurs doit-on donner aux constantes A_0, A_1, A_2, etc. pour que l'équation

$$A_0 f(0,x) + A_1 f(1,x) + A_2 f(2,x) + \text{etc.} = F(x) \qquad (371)$$

(où $f[0,x]$, $f[1,x]$, etc. sont des fonctions quelconques de x) soit satisfaite?

Solution. On a vu au commencement de ce Mémoire comme l'on faisait dépendre la solution de ce problème de la résolution de l'équation (7). On sait donc comment le traiter.

Les problèmes précédents sont d'une si vaste étendue et généralité qu'ils comprennent tous les problèmes d'analyse déterminée que l'on puisse se proposer, pourvu seulement qu'ils soient linéaires. Nous croyons donc inutile de nous y arrêter plus long-temps. Passons donc à la résolution d'équations de la forme (7), mais à plusieurs variables.

L.

Prenons l'équation générale à trois variables

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)\,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\,\varphi(x+\theta_1,y+\theta_2,z+\theta_3)\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3 = F(x,y,z), \qquad (372)$$

où

$$f(x,y,z,\theta_1,\theta_2,\theta_3) \qquad (373)$$

est une fonction quelconque générale des six variables $x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3$. Ce que nous allons dire sur

la résolution de cette équation pourra s'appliquer au cas où le problème au lieu de trois en aura un nombre quelconque.

Posons

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\Phi_1(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\, e^{y\Phi_2(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\, e^{z\Phi_3(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}$$
$$\varphi_1(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3. \qquad (374)$$

Mettant cette expression de $\varphi(x,y,z)$ dans l'équation précédente et faisant, pour abréger,

$$(x-\omega_1\sqrt{-1})\,(y-\omega_2\sqrt{-1})\,(z-\omega_3\sqrt{-1})\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\, e^{\theta_1\Phi_1(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}$$
$$e^{\theta_2\Phi_2(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\, e^{\theta_3\Phi_3(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3 = {}_1f(x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1}), \qquad (375)$$

on aura

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_1f(x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1})\,\varphi_1(\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1})}{(x-\omega_1\sqrt{-1})\,(y-\omega_2\sqrt{-1})\,(z-\omega_3\sqrt{-1})}\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3$$
$$= F(x,y,z) \qquad (376)$$

Pour déterminer la fonction inconnue φ_1, qui entre dans cette équation, je ferai usage de la formule

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\chi_1\sqrt{-1},\,\chi_2\sqrt{-1},\,\chi_3\sqrt{-1},\,x,y,z)}{(x-\chi_1\sqrt{-1})\,(y-\chi_2\sqrt{-1})\,(z-\chi_3\sqrt{-1})}\,d\chi_1\,d\chi_2\,d\chi_3, \qquad (377)$$

qui sera démontrée plus bas.

En l'appliquant à cette équation, elle deviendra

$${}_1f(x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1})\,\varphi_1(x,y,z) = F(x,y,z), \qquad (378)$$

et donnera tout de suite la valeur de $\varphi_1(x,y,z)$: l'équation (374) donne après celle de la fonction cherchée $\varphi(x,y,z)$.

Mais pour que cette solution ait lieu, il faut que la fonction du premier membre de l'équation (375) soit finie quand on y fait alternativement $x=\omega_1\sqrt{-1}$, $y=\omega_2\sqrt{-1}$, $z=\omega_3\sqrt{-1}$; ou, pour parler plus exactement, il faut que la fonction

$$\frac{1}{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\, e^{\theta_1\Phi_1(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\, e^{\theta_2\Phi_2(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\, e^{\theta_3\Phi_3(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3} \qquad (379)$$

soit divisible par chaqu'un des trois facteurs

$$x-\omega_1\sqrt{-1}, \qquad y-\omega_2\sqrt{-1}, \qquad z-\omega_3\sqrt{-1}, \qquad (380)$$

séparément; ce qu'on tâchera de faire en déterminant convenablement les trois fonctions inconnues Φ_1, Φ_2, Φ_3.

C'est par cette détermination que la résolution du problème (372), à trois ou à un nombre quelconque de variables, est plus compliquée que celle du problème (7), à une seule. Cependant cette détermination, quoique bien plus difficile, peut être mise au nombre des problèmes que l'on sait résoudre. Si la fonction $f(x,y,z,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ est telle qu'on puisse la décomposer en trois facteurs comme suit

$${}^1f(x,\theta_1)\,{}^2f(y,\theta_2)\,{}^3f(z,\theta_3), \qquad (381)$$

la question n'a pas la moindre difficulté, car la fonction (379) prenant la forme

$$\frac{1}{\int_{\alpha_1}^{\beta_1} {}^1f(x,\theta_1)\, e^{\theta_1\Phi_1(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_1 \cdot \int_{\alpha_2}^{\beta_2} {}^2f(x,\theta_2)\, e^{\theta_2\Phi_2(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_2 \cdot \int_{\alpha_3}^{\beta_3} {}^3f(x,\theta_3)\, e^{\theta_3\Phi_3(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_3}, \tag{382}$$

pour qu'elle soit divisible par les trois facteurs (380), on n'a qu'à déterminer Φ_1, Φ_2, Φ_3 par les trois équations

$$\frac{1}{\int_{\alpha_1}^{\beta_1} {}^1f(\omega_1\sqrt{-1},\theta_1)\, e^{\theta_1\Phi_1(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_1} = 0, \quad \frac{1}{\int_{\alpha_2}^{\beta_2} {}^2f(\omega_2\sqrt{-1},\theta_2)\, e^{\theta_2\Phi_2(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_2} = 0,$$

$$\frac{1}{\int_{\alpha_3}^{\beta_3} {}^3f(\omega_3\sqrt{-1},\theta_3)\, e^{\theta_3\Phi_3(\omega_1\sqrt{-1},\,\omega_2\sqrt{-1},\,\omega_3\sqrt{-1})}\,d\theta_3} = 0. \tag{383}$$

La question n'offre alors pas plus de difficulté que si elle était à une seule variable.

Mais si la fonction n'a pas la forme (380), il faut tâcher de partager le quotient (379) en quatre facteurs comme suit

$$\frac{1}{f_1(x,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} \cdot \frac{1}{f_2(y,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}$$
$$\frac{1}{f_3(z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} \cdot \frac{1}{f_4(x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3).} \tag{384}$$

Cela fait, la question n'offre pas non plus la moindre difficulté, car, en posant

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f_1(\omega_1\sqrt{-1},\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} &= 0, \\ \frac{1}{f_2(\omega_2\sqrt{-1},\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} &= 0, \\ \frac{1}{f_3(\omega_3\sqrt{-1},\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{385}$$

la fonction (379) sera divisible par les trois facteurs (380), et on aura trois équations transcendentes qui donneront les valeurs des fonctions inconnues Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Si les intégrations qui entrent dans la fonction (379) étaient exécutées, il n'y aurait pas de difficulté à la mettre sous la forme (384), si la chose est possible. Pour y arriver plus facilement on doit prendre pour φ l'expression

$$\varphi(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_1[x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3]\,\varphi_1(\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1})\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3, \tag{386}$$

au lieu de celle que nous avons prise. Dans cette équation Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont trois fonctions des trois variables $\omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, \omega_3\sqrt{-1}$; F_1, une fonction, non seulement des trois fonctions précédentes, mais encore de x, y, z. On peut disposer arbitrairement de la forme de ces quatre fonctions pour rendre plus facile la solution du problème dont nous nous occupons, puisqu'on a encore la fonction générale φ_1, qui remplacera φ, et sera déterminée par les conditions mêmes du problème proposé.

Mettant dans l'équation (372), au lieu de $\varphi(x,y,z)$, l'intégrale triple précédente, et continuant la solution comme nous avons fait un peu plus haut, il est clair qu'on trouvera qu'il faut déterminer les fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3 et F_1 par la condition que la quantité

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\, F_1[x+\theta_1, y+\theta_2, z+\theta_3, \omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, \omega_3\sqrt{-1}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3 \tag{387}$$

soit divisible par les trois facteurs (380).

Comme la fonction F_1 est tout à fait arbitraire, on peut lui donner la forme qui sera la plus convenable pour faciliter les intégrations; chose à laquelle on arrivera le plus souvent en faisant un petit nombre d'essais. Si l'on n'y arrive pas tout de suite, pour rendre cette recherche plus systématique, on doit procéder comme suit.

On doit remarquer, d'après les calculs que nous avons éxécutés que, non seulement la fonction (387) doit être divisible par les trois facteurs (380), mais qu'elle ne doit l'être qu'une seule fois. Il en résulte qu'en désignant par F_2 la caractéristique d'une fonction des variables $x, y, z, \omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, \omega_3\sqrt{-1}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$, ne se réduisant jamais à zéro ou à l'infini pour aucune des suppositions

$$x = \omega_1\sqrt{-1}, \qquad y = \omega_2\sqrt{-1}, \qquad z = \omega_3\sqrt{-1}, \tag{388}$$

mais d'ailleurs quelconque, la fonction (387) doit être de la forme

$$\frac{(x-\omega_1\sqrt{-1})\,(y-\omega_2\sqrt{-1})\,(z-\omega_3\sqrt{-1})}{F_2(x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}. \tag{389}$$

Rapprochant ces deux fonctions l'une de l'autre, on a

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\, F_1[x+\theta_1, y+\theta_2, z+\theta_3, \omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, \omega_3\sqrt{-1}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3$$
$$= \frac{F_2(x,y,z,\omega_1\sqrt{-1},\omega_2\sqrt{-1},\omega_3\sqrt{-1},\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}{(x-\omega_1\sqrt{-1})\,(y-\omega_2\sqrt{-1})\,(z-\omega_3\sqrt{-1})}. \tag{390}$$

Ainsi pour déterminer la fonction φ dans l'équation (372), nous voilà ramenés à une équation de a même forme, mais avec cette grande différence que dans l'équation proposée tout est déterminé, tandis que dans l'équation auxiliaire (390) on peut disposer presque arbitrairement de la plupart des fonctions qui y entrent, et par conséquent le problème n'a presque aucune difficulté, et peut être mis au nombre de ceux qu'on sait résoudre.

LI.

Dans le N° précédent nous avons laissé pour démontrer une proposition dont nous allons nous occuper maintenant; savoir la démonstration de la formule (377); qui peut être facilement faite comme suit. Comme l'équation (88), dans les cas où elle subsiste, doit être identique, il est clair qu'on aura

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega_1\sqrt{-1},y,z)}{x-\omega_1\sqrt{-1}}\,d\omega_1; \tag{391}$$

mais la fonction $\varphi(\omega_1\sqrt{-1}, y, z)$, en vertu de la même formule, pouvant être mise sous la forme

$$\varphi(\omega_1\sqrt{-1}, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, z)}{y-\omega_2\sqrt{-1}}d\omega. \tag{392}$$

l'équation précédente prendra la forme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, z)}{(x-\omega_1\sqrt{-1})(y-\omega_2\sqrt{-1})}d\omega_1 d\omega_2. \tag{393}$$

Si on transforme encore $\varphi(\omega_1\sqrt{-1}, \omega_2\sqrt{-1}, z)$ par la même formule, on trouvera la formule (377) qu'il s'agissait de démontrer.

La même démonstration a lieu quelque soit le nombre des variables. La seconde proposition que nous avons à démontrer c'est comme on peut tirer des équations (383) les valeurs des trois fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Cela n'a pas la moindre difficulté d'après ce qu'on a vu dans le N° XXXVI.

LII.

Nous avons vu comme on peut trouver pour $\varphi(x, y, z)$ une fonction de trois variables x, y, z satisfaisant à l'équation (372). Suivant la méthode que nous avons donnée dans le N° XLV on pourrait trouver un nombre quelconque d'intégrales particulières de la même équation; en faisant leur somme on aura une solution plus générale. On peut, si on veut, remplacer les constantes qui y entrent en nombre infini par des fonctions arbitraires.

Si au lieu d'avoir une seule fonction $\varphi(x, y, z)$ à trois ou plusieurs variables, on avait plusieurs fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, etc. à plusieurs variables indépendantes, données par un système d'équations simultanées, analogue au système des équations (324), (325), à trois variables, ayant en vue ce que l'on a fait dans le N° XLVet à ce qu'on vient de lire un peu plus haut, il est très-facile de voir comme on peut déterminer toutes les fonctions cherchées $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, etc.

LIII.

Nous nous trouvons maintenant en état de résoudre tous les problèmes que l'on puisse se proposer à deux ou à un nombre quelconque de variables, qu'ils soient linéaires ou non. Quand les problèmes sont linéaires on voit cela facilement. Ainsi si l'on avait l'équation générale aux différentielles partielles et à deux variables indépendantes

$$f\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \text{etc.}\right) = F(x, y); \tag{394}$$

posant

$$u = \varphi(x, y = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{k_1\theta_1 x} e^{k_2\theta_2 y}\varphi_1(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2, \tag{395}$$

on arrivera à une équation de la forme (372), mais à deux variables indépendantes, qui donnera $\varphi_1(x,y)$: l'égalité précédente donnera après $\varphi(x,y)$.

On trouvera la même facilité à réduire à la forme (372) tout autre problème linéaire. Pour faire voir que la même chose a lieu pour ceux qui ne le sont pas, nous allons montrer comme on peut intégrer les équations différentielles non linéaires, soit aux différentielles ordinaires, soit aux différentielles partielles.

LIV.

Supposons qu'on ait premièrement l'équation

$$P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{396}$$

où P et Q sont deux fonctions quelconques de x et y.

En la multipliant par un certain facteur u, convenablement choisi pour qu'elle devienne une différentielle exacte, et exécutant l'intégration, on trouve, comme on sait,

$$\int Q\,u\,dx + \int dx\,(Pu - \frac{d\cdot}{dx}\int Q\,u\,dy) = \text{const}, \tag{397}$$

le facteur u étant déterminé par l'équation

$$P\frac{du}{dy} - Q\frac{du}{dx} - u\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) = 0, \tag{398}$$

qui étant linéaire et à deux variables peut être traitée d'après les méthodes que nous avons précédemment données.

Supposons maintenant qu'on l'ait l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = 0, \tag{399}$$

où $P_1\ P_2 \cdots P_n$ sont des fonctions quelconques de x, y, X et de ses dérivées par rapport à x.

Multiplions cette équation par u et intégrons par parties; on aura

$$\left.\begin{aligned} &\int y\left[Pu - \frac{d\cdot(P_1u)}{dx} + \frac{d^2\cdot(P_2u)}{dx^2} - \text{etc.}\right]dx \\ &+ y\left[uP_1 - \frac{d\cdot(P_2u)}{dx} + \frac{d^2\cdot(P_3u)}{dx^3} - \text{etc.}\right] \\ &+ \frac{dy}{dx}\left[uP_2 - \frac{d\cdot(P_3u)}{dx} + \text{etc.}\right] \\ &+ \frac{d^2y}{dx^2}\left[P_3u - \text{etc.}\right] \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\} = + \text{cont.} \tag{400}$$

Cette équation sera l'intégrale première de l'équation (399), si l'on détermine u par l'égalité

$$Pu - \frac{d\cdot(P_1u)}{dx} + \frac{d^2\cdot(P_2u)}{dx^2} - \text{etc.} = 0. \tag{401}$$

Comme l'équation (399) donne $\frac{d^n y}{dx^n}$ en fonction de x, y et des dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, nous

pouvons regarder n comme étant fonction seulement de ces variables et non pas de $\frac{d^n y}{dx^n}$. Faisant ces quantités respectivement égales à z_1, z_2, z_3, etc. l'équation (401) deviendra une équation linéaire aux différences partielles, renfermant $n+1$ variables, et que l'on peut intégrer par les méthodes précédentes.

Supposons qu'on ait trouvé n intégrales particulières de cette équation: en les mettant successivement au lieu de u dans l'équation (400), après avoir supprimé le premier terme, on aura n équations, entre lesquelles éliminant $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ on arrivera à une équation, ne renfermant que x et y, qui sera l'intégrale de la proposée. Si chacune des valeurs particulières de n contient une constante arbitraire, l'intégrale trouvée sera l'intégrale générale.

LV.

Les équations aux différentielles partielles non linéaires peuvent être aussi intégrées comme suit. Supposons que l'équation à intégrer soit

$$\sum_0^n \sum_0^{n'} {}_nf_{n'} \left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2} \text{ etc.}\right) \frac{d^{n+n'}u}{dx^n\, dy^{n'}} = 0; \qquad (402)$$

${}_nf_{n'}$ étant une fonction, linéaire ou non, de x, y, u et des différents coefficients différentiels; Σ, Σ des caractéristiques sommataires.

Posons l'équation

$$\sum_0^n \sum_0^{n'} {}_n^1f_{n'} \left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2} \text{ etc.}\right) \frac{d^{n+n'-r}u}{dx^{n-r}\, dy^{n'}} \frac{d^r\varphi}{dz^r} (z-x)\chi = 0; \qquad (403)$$

où χ est une fonction, renfermant des derivées de φ par rapport à $\frac{du}{dx}$ etc. et où ${}_n^1f_{n'}$ une fonction renfermant la nouvelle variable z de plus que la fonction ${}_nf_{n'}$, mais tellement choisie qu'en y faisant $z = x$ (une des variables de la proposée), elles deviennent égales. Mais si ces deux fonctions deviennent égales, l'équation auxiliaire (403) se réduisant à

$$\sum_0^n \sum_0^{n'} {}_nf_{n'} \left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \text{ etc.}\right) \frac{d^{n+n'-r}u}{dx^{n-r}\, dy^{n'}} \frac{d^r\varphi}{dx^r} = 0, \qquad (404)$$

on voit de suite qu'on peut la satisfaire en prenant pour φ la fonction u qui satisfait à l'équation proposée. De l'autre coté, on voit aussi qu'ayant trouvé une fonction de x, y, z et u qui mise à la place de φ satisfasse à l'équation (403), en y faisant $z = x$, cette expression de φ ne pourra pas être différente de la fonction u satisfaisant à l'équation (402).

Si l'on pose maintenant

$$x = z_1, \quad y = z_2, \quad z = z_3, \quad u = z_4, \quad \frac{du}{dx} = z_5, \quad \frac{du}{dy} = z_6, \text{ etc.} \qquad (405)$$

l'équation (403) deviendra une équation différentielle partielle linéaire, que l'on peut intégrer d'après ce qu'on a vu dans le N° LIII.

De cette manière on peut toujours ramener l'intégration des equations non linéaires, à l'intégration d'autres équations linéaires renfermant un plus grand nombre de variables.

Pour éclaircir ce qui précède, donnons un exemple de cette réduction.

Soit l'équation

$$(x^2 + y^2)\, u^2 + \operatorname{tang} \frac{x+y}{y^3} \frac{du}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2 + \frac{d^2u}{dx^2} = 0. \tag{406}$$

Si l'on fait $z = x$ dans l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\left\{x^2+y^2+f(x,y)\,[f_1(x,y) - f_1(z,y)]\right\} u\varphi + (z-x)\frac{du}{dx}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d\varphi}{dx} + \operatorname{tg}\frac{x+y}{y^3}\frac{d\varphi}{dx} + (z-x)\frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ &+ \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{d^2u}{dy^2} + \left[f_3\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin(z-x) + 1\right]\frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ &+ \left(\frac{d\cdot\varphi}{d\cdot\dfrac{du}{dx}} + \frac{d\cdot\varphi}{d\cdot\dfrac{du}{dy}} + \frac{d\cdot\varphi}{d\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}} + \frac{d\cdot\varphi}{d\cdot\dfrac{d^2u}{dy^2}} + \frac{d^2\varphi}{du^2}\right)(z-x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{407}$$

on aura

$$(x^2 + y^2)\, u\varphi + \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{y^3}\right)\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \tag{408}$$

Or comparant cette équation à l'équation (406), ou voit que φ doit être égal à u.

On peut donc prendre l'équation (407) pour l'auxiliaire de l'équation (406). Posant

$$\frac{du}{dx} = u_1, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = u_2, \quad \frac{du}{dy} = z_1, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = z_2,$$

on la transforme en celle-ci

$$\left.\begin{aligned} &\left\{x^2+y^2+f(x,y)\,[f_1(x,y) - f_1(z,y)]\right\} u\varphi + (z-x)\frac{d\varphi}{dx}\,u_1 z_2 + \operatorname{tg}\frac{x+y}{y^3}\frac{d\varphi}{dx} + (z-x)\frac{d^2\varphi}{dz^2} \\ &+ z_2\frac{d^2\varphi}{dy^2} + [f_3(z_2)\sin(z-x) + 1]\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{d\varphi}{du_1} + \frac{d\varphi}{dz_1} + \frac{d\varphi}{du_2} + \frac{d\varphi}{dz_2} + \frac{d^2\varphi}{du^2}\right)(z-x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{409}$$

qui est une équation différentielle linéaire, et peut être intégrée d'après le N° LIII.

Supposons qu'on ait trouvé

$$\varphi = \psi(x, y, z, u_1, z_1, u_2, z_2): \tag{410}$$

en y faisant $z = x$ et remplaçant u_1, u_2, z_1, u_2 par ce que ces quantités désignent, on aura

$$u = \psi\left(x, y, x, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}\right) \tag{411}$$

pour intégrale de l'équation (406). On peut former d'autres intégrales du même genre; et éliminant entre elles les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, on arrivera à une équation sans dérivées qui sera l'intégrale définitive de la proposée.

On aurait pu choisir pour l'auxiliaire de l'équation (406) une équation bien plus simple que l'équation (408), qui a été prise au hazard. On doit introduire dans ces auxiliaires plusieurs fonctions à forme indéterminée dont on disposera pour faciliter son intégration.

LVI.

Au lieu de faire dépendre l'intégration des équations non linéaires des équations linéaires, en augmentant le nombre des variables, on peut renverser la question en faisant dépendre l'intégration des

équations linéaires à plusieurs variables de l'intégration d'équations non linéaires, mais dont le nombre de variables est plus petit. Quelque soit la marche qu'on adopte, nos méthodes s'appliquent soit aux problèmes linéaires (dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent) soit à ceux qui ne le sont pas. Pour le faire voir prenons un exemple, qui soit pourtant assez général pour qu'on puisse voir ce qu'on peut faire dans tout autre cas.

Soit l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, f_1[\theta, x, \varphi(x+\theta)]\, d\theta = F(x), \tag{412}$$

où l'on désigne par f, f_1, F, trois fonctions quelconques données ; φ la fonction à déterminer par les conditions du problème.

Prenons une fonction $f_2(x, \theta)$ telle qu'on ait

$$\frac{f_1[\pm\infty\sqrt{-1}, x, \varphi(x \pm \infty\sqrt{-1})]}{f_2(x, \pm\infty\sqrt{-1})} = 0. \tag{413}$$

Cela est très facile à faire ; et la fonction $f_2(x, \theta)$ satisfaisant à cette condition restera en grande partie indéterminée. On peut poser, eu égard à la formule (88),

$$\frac{f_1[\theta, x, \varphi(x+\theta)]}{f_2(x, \theta)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1[\omega\sqrt{-1}, x, \varphi(x+\omega\sqrt{-1})]}{(\theta-\omega\sqrt{-1})\, f_2(x, \omega\sqrt{-1})}\, dx. \tag{414}$$

Maintenant faisons $\omega\sqrt{-1} = \psi(\chi\sqrt{-1})$, ψ étant une fonction telle qu'on ait

$$\psi(\pm\infty\sqrt{-1}) = \pm\infty. \tag{415}$$

L'équation précédente deviendra

$$\frac{f_1[\theta, x, \varphi(x+\theta)]}{f_2(x, \theta)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1\{\psi(\chi\sqrt{-1}), x, \varphi[x+\psi(\chi\sqrt{-1})]\}}{\{[\theta-\psi(\chi\sqrt{-1})]\, f_2[x, \psi(\chi\sqrt{-1})]\}}\, \psi'(\chi\sqrt{-1})\, d\chi. \tag{416}$$

Au moyen de cette formule on peut donner à l'égalité (412) la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_1f(x, \chi\sqrt{-1})\, f_1\{\psi(\chi\sqrt{-1}), x, \varphi[x+\psi(\chi\sqrt{-1})]\}}{(x-\chi\sqrt{-1})\, f_2[x, \psi(\chi\sqrt{-1})]}\, \psi'(\chi\sqrt{-1})\, d\chi = F(x), \tag{417}$$

en faisant pour abréger

$$(x-\chi\sqrt{-1})\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x, \theta)\, f_2(x, \theta)}{\theta-\psi(\chi\sqrt{-1})}\, d\theta = {}_1f(x, \chi\sqrt{-1}). \tag{418}$$

Elle peut encore s'écrire comme suit

$$\frac{{}_1f(x, x)\, \psi'(x)\, f_1\{\psi(x), x, \varphi[x+\psi(x)]\}}{f_2[x, \psi(x)]} = F(x), \tag{419}$$

en vertu de la formule (88).

Pour que cette équation soit finie il faut que ${}_1f(x, x)$ le soit ; ce qui exige qu'on ait

$$\frac{1}{\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\chi\sqrt{-1}, \theta)\, f_2(\chi\sqrt{-1}, \theta)}{\theta-\psi(\chi\sqrt{-1})}\, d\theta} = 0. \tag{420}$$

Cette équation détermine $\psi(\chi\sqrt{-1})$; et comme f_2 est une fonction à peu près arbitraire, on en disposera pour satisfaire à la condition à laquelle la fonction $\psi(\chi\sqrt{-1})$ est assujétie. Faisant après $x+\psi(x)=y$ et désignant par $\psi_1(y)$ la valeur de x déduite de cette équation, l'égalité (419) prendra la forme

$$\frac{{}_1f[\psi_1(y),\psi_1(x)]\,\psi'[\psi_1(x)]\,f_1\{\psi[\psi_1(x)],\psi_1(x),\varphi(x)\}}{f_2[\psi_1(x),\psi_1(x)]}=F[\psi_1(x)]. \qquad (421)$$

On n'a plus qu'à résoudre cette équation pour trouver la valeur de $\varphi(x)$. Si au lieu de l'équation (412) nous en avions une autre renfermant plusieurs caractéristiques d'intégration définie enveloppant la fonction inconnue $\varphi(x)$, la méthode que vous venons d'exposer ne serait pas du tout changée. Mais alors il est très facile de voir comme on peut, par de tels moyens, intégrer une équation différentielle quelconque qui n'est pas linéaire. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$f(x)\,\varphi(x)+{}_2f_1(x)\,[\varphi(x)]^2+f_1(x)\frac{d\varphi}{dx}+\text{etc.}=F(x), \qquad (422)$$

en prenant pour désigner $\varphi(x)$ la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\omega(x-\theta)\sqrt{-1}}\varphi(\theta)\,d\theta\,d\omega, \qquad (423)$$

on la transformera en

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\omega(x-\theta)\sqrt{-1}}\{f(x)\,\varphi(\theta)+{}_2f(x)\,[\varphi(\theta)]^2+f_1(x)\,\varphi(\theta)\,\omega\sqrt{-1}+\text{etc.}\}\,d\theta\,d\omega=F(x); \qquad (424)$$

or cette équation peut être traitée par la méthode qu'on vient de lire.

Si l'on a sous ses yeux les calculs du N° L la même méthode peut encore s'appliquer au cas où on a un nombre quelconque de variables.

Nos méthodes nous permettent donc d'intégrer une équation différentielle d'un ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables.

LVII.

Ainsi voilà le Calcul intégral fini, et la solution de ce fameux problème de trouver l'intégrale d'une équation différentielle quelconque définitivement donnée et donnée de la manière la plus simple. On ne doit pas croire pourtant que je l'aie trouvée aussi facilement que je viens de l'exposer. Aimant par dessus tout autre chose les sciences qui ont pour sujet l'étude de la nature, je me suis déterminé à étudier les mathématiques pour mieux les connaître. Mais quand on commence cette étude, on s'arrête à chaque instant devant les difficultés insurmontables qu'offre le Calcul intégral. S'il y a pourtant quelque chose vraiement séduisante c'est l'étude de cette branche d'Analyse. Voulez-vous connaître la théorie de la distribution de la chaleur à la surface des corps conducteurs? Vous vous arrêtez devant les obstacles que vous présente le Calcul intégral. Voulez-vous connaître le mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps solides d'une figure quelconque? Voilà encore le Calcul intégral qui vous oblige à vous arrêter presque au commencement de la carrière. Voulez-vous connaître la propogation du mouvement à l'intérieur des corps? l'état vibratoire de leurs molécules? la théorie des marées? la figure des planètes qui s'éloignent sensiblement de la forme sphérique? la loi de variation de leur

densités, etc. etc.? Vous rencontrez le Calcul intégral devant vous; immense, impassible, insurmontable, résistant aux efforts combinés de tous les géomètres distingués de l'Europe, dont pas un seul n'a pas pu s'empêcher de lutter, au moins pour quelque temps, corps à corps avec lui! Quand on voit toutes ces théories dépendant de ce Calcul et ce Calcul lui-même réduit à un seul problème, il y a quelque chose qui vous pousse, qui vous entraîne presque malgré vous-même. On le regarde; on le mesure; on le croit invincible; mais on va en avant, poussé par cette curiosité inquiète qui nous porte dans les sciences à briser notre organisation devant des obstacles que nous savons ne pourvoir pas vaincre! Heureusement des tentatives sans nombre, et une étude poussée avec la plus ferme persévérance, après avoir été plusieurs fois tout à fait découragé, et avoir trouvé quelques solutions impraticables par leur difficulté, je suis arrivé de la manière la plus simple et la plus heureuse, à obtenir ce qu'on a si longtemps regardé comme tout à fait impossible. On ne peut presque pas dire toutes les conséquences qu'une telle découverte peut avoir. Les barrières devant lesquelles se sont arrêtées si longtemps toutes les branches de la Physique, Mécanique et Astronomie, se trouvent renversées et renversées d'un seul coup. Tout problème déterminé peut être résolu. Les difficultés de calcul vaincues, nous pouvons tourner plus particulièrement notre esprit à l'observation des phenomènes de la nature, surs de ce que, si nous trouvons un rapport quelconque entre le phénomènee ou la cause cherchée et d'autres qu'on peut voir et mesurer, il sera toujours possible de remonter de ceux-ci au premier.

Mon premier but est donc atteint: mais quand je veux procéder au second, d'appliquer ces formules et d'interroger la nature elle-même, je me vois peut-être obligé à m'arrêter! Des méthodes générales d'intégration sont trouvées, il est vrai, mais ma santé est détruite et mon organisation épuisée, l'état de mes yeux ne me permettant peut-être plus de me livrer à des recherches où la plus profonde attention et la persévérance la plus assidue sont absolument nécessaires. Mais si je suis forcé à m'arrêter ici et s'il ne m'est pas permis de voir déroulée devant mes yeux la scène où mon imagination s'était tant de fois jetée, j'aurai du moins le plaisir d'avoir ouvert le chemin pour les autres, et de savoir qu'il sera permis maintenant à l'homme de lire d'une manière plus profonde dans le sein du Créateur.

Addition

au

Mémoire sur des méthodes générales d'intégration.

I.

J'ai laissé imprimer les mots que l'on vient de lire à la fin du Mémoire précédent parce qu'ils étaient l'expression du sentiment que j'éprouvais au moment où je venais de trouver la solution d'un problème que je cherchais depuis si longtemps, et qui me promettait tant pour le progrès des sciences mathématiques, ainsi que de celles où le calcul a été appliqué à l'étude des phénomènes de la nature. Je savais bien que les méthodes dont je faisais usage laissaient quelque chose à désirer sous le rapport de la rigueur des démonstrations, car la teinture la plus légère des sciences mathématiques suffit pour montrer que toute démonstration fondée sur les suites divergentes est bien loin d'avoir la rigueur de la méthode géométrique des Anciens. Mais voyant de l'autre côté l'importance de la loi des analogies qui nous porte dans les sciences mathématiques quand nous avons démontré quelque proposition pour une fonction d'une certaine généralité, à l'étendre tout de suite à d'autres fonctions plus générales avant que nous en ayons pu donner une démonstration, j'étais bien convaincu de la haute importance de la solution que je venais de trouver. Une solution en suite doit être au moins regardée sinon comme la solution définitive du problème proposé, du moins comme nous ouvrant le chemin à une autre plus exacte et plus complète. Tout l'édifice des mathématiques a été pour bien des siècles basé uniquement sur les suites divergentes; et on peut à leur moyen démontrer l'exactitude de tous les théorèmes connus d'Analyse. S'il n'y est pas question d'intégrations définies, les résultats sont toujours exacts: il n'y a que les cas où l'on a des intégrales numériques à évaluer, que quelques fautes peuvent se glisser; mais, dans ces cas, les formules présentent toujours un caractère particulier d'absurdité manifeste (comme quand une quantité qui devrait être réelle devient égale à une quantité imaginaire, ou bien une positive à une négative) qui nous porte à reconnaître l'erreur et revenir sur nos pas. D'ailleurs on peut toujours mettre de côté ces cas douteux, n'employant que des suites divergentes qui expriment des fonctions générales dont la forme ne soit pas prise en considération dans la proposition que l'on veut démontrer, et qu'on doit éliminer après.

Quand il s'agira donc d'un problème difficile on doit commencer par trouver une première solution en suite, qui conduira à une valeur de la fonction cherchée que l'on regardera comme la fonction présumée, trouvée par induction, et dont on tâchera après de démontrer l'exactitude par d'autres moyens ou bien de vérifier. C'est ce que font généralement les géomètres, puisque tous, à l'exception de ceux dont les recherches portent sur des fonctions particulières (ellyptiques, abèliennes, numé-

riques, etc.), font plus ou moins usage de suites divergentes. Nous avons dit que, le plus souvent, ayant trouvé une solution en suite, l'on peut, presque toujours, arriver à une autre qui soit plus complète ou même tout-à-fait rigoureuse. C'est ce qui nous est arrivé. En effet, après avoir trouvé une première solution de l'équation (7), solution qui laissait beaucoup à désirer, nous avons après, au N° XXIX et suivants, présenté des considérations sur les suites et sur la manière dont on devait s'en servir, qui ont, rendu cette solution incomparablement plus complète et plus rigoureuse. Après, puisque nous avions pu exprimer la suite trouvée au moyen d'une intégrale définie, l'idée nous est venue, partant de cette intégrale définie déjà trouvée, d'examiner, sans passer par l'intermédiaire des suites, si cette fonction ne pourrait pas vérifier notre équation proposée. Cela nous a porté à la découverte de la méthode du N° XXXIV. Mais cette méthode, n'est pas encore complète, on me dira; les séries n'y entrent pas, il est vrai, mais nous avons fait usage de la formule (88), qui a été démontrée dans la supposition d'être la fonction $\varphi(x)$ réductible à la forme

$$\int_a^b e^{-x\theta}\,\varphi_1(\theta)\,d\theta;$$

or quoique cette fonction soit déjà générale, on ne peut pas pourtant dire qu'elle puisse représenter une fonction quelconque. Cela est vrai, et nous a porté à faire des nouvelles réflexions dont le résultat a été une autre méthode qui ne laisse, ce me semble, plus rien à désirer ni sous le rapport de la rigueur ni sous celui de la généralité.

Avant pourtant de l'exposer, nous allons faire quelques observations sur la solution qui a été donnée au N° VI.

II

Reprenons la solution du problème (7) qui a été donné au N° VI.

Posons toujours l'équation (40), mais au lieu de la suite qui a été prise pour représenter la fonction $\varphi(x)$, prenons celle-ci

$$\varphi(x) = \Sigma A_n \int_a^b e^{m_n \omega x}\,\varphi_1(m_n, \omega)\,d\omega, \tag{1}$$

qui est plus générale, et où A_n désigne une fonction de la constante m_n; $\varphi_1(m_n, \theta)$ une fonction de la même constante et de la variable θ.

Faisant les substitutions, l'équation (7) deviendra

$$\Sigma A_n \int_\alpha^\beta f(x, \theta)\,e^{m_n \theta x}\,d\theta \int_a^b e^{m_n \omega \theta}\,\varphi_1(m_n, \omega)\,d\theta = \Sigma \frac{F_2(a_n)}{f_n(a_n)\,F_1'(a_n)}\,\frac{f_n(x)}{x-a_n}; \tag{2}$$

et continuant la solution comme dans le N° cité, on trouvera qu'il faut déterminer m_n par l'équation

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta f(a_n, \theta)\,e^{m_n \theta a_n}\,d\theta \int_a^b e^{m_n \omega \theta}\,\varphi_1(m_n, \omega)\,d\omega} = 0; \tag{3}$$

A_n et $f_n(x)$ par

$$A_n = \frac{F_2(a_n)}{f_n(a_n)\,F_1'(a_n)}. \tag{4}$$

$$f_n(x) = (x-a_n)\int_\alpha^\beta f(x,\theta)\, e^{m_n\theta x}\, d\theta \int_a^b e^{m_n\omega\theta}\, \varphi_1(m_n,\omega)\, d\omega. \tag{5}$$

Dans cette solution la fonction φ_1 restant tout-à-fait arbitraire, on en disposera pour rendre convergentes les séries qui y entrent, particulièrement celle du second nembre de l'équation (40) du Mémoire; chose généralement très-facile car vous n'avez qu'à choisir cette fonction par la condition que la quantité

$$\frac{F_2(a_{n+1})}{f_{n+1}(a_{n+1})\, F_1'(a_{n+1})}\ \frac{f_{n+1}(x)}{x-a_{n+1}} : \frac{F_2(a_n)}{f_n(a_n)\, F_1'(a_n)}\ \frac{f_n(x)}{x-a_n} \tag{6}$$

s'évanouisse pour des valeurs infiniment grandes de n.

On peut encore disposer de la forme de cette fonction pour tâcher de faire coïncider la série du second membre de l'équation (2) avec quelque développement déjà connu de la fonction $F(x)$.

III.

Quoique les géomètres aient été très-souvent portés, dans leurs recherches sur la Physique mathématique, à admettre des égalités de la forme (40) du Mémoire, et que nous ayons donné une démonstration de la possibilité de cette équation, il n'en est pas pourtant moins vrai que cela forme la partie la plus délicate de notre solution. Notre démonstration a été basée sur des suites qui peuvent n'être pas convergentes: en voici une autre qui est bien plus rigoureuse, et qui résulte des calculs développés au N° XXII du Mémoire.

Je remarquerai premièrement qu'il est très-facile de prouver par des considérations géomètriques que l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(x,\theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x) \tag{7}$$

est toujours susceplible d'avoir un solution. Admettons maintenant que l'on sache, soit d'après la nature du problème qu'on veut résoudre, soit d'après la forme de cette équation (et on peut toujours la mettre sous une telle forme) que la fonction $\varphi(x)$ s'évanouit pour des valeurs infinies de x, positives ou négatives, réelles ou imaginaires. Il résulte d'un théorème de M. Cauchy que nous avons cité plus haut qu'il est toujours possible de développer la fonction $\varphi(x)$ en suite de la forme

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(a_1)}{x-a_1} + \frac{\varphi_1(a_2)}{x-a_2} + \frac{\varphi_1(a_3)}{x-a_3} + \text{etc.} \tag{8}$$

Substituant cette série dans l'équation précédente, et faisant, pour abréger,

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x,\theta)}{x+\theta-a_n}\, d\theta = {}_1F(x,a_n), \tag{9}$$

on aura

$$\varphi_1(a_1)\, {}_1F(x,a_1) + \varphi_1(a_2)\, {}_2F(x,a_2) + \text{etc.} = F(x). \tag{10}$$

Or, $f(x,\theta)$ étant une fonction quelconque de x et θ, ${}_1F(x,a_n)$ pouvant, en conséquence, représenter

aussi une fonction quelconque de x et a_n, il s'en suit que nous nous trouvons portés par la nature des choses à admettre la possibilité de l'équation (22) et par suite de l'équation (40), qui en est un cas particulier.

Je dois observer que le théorème de M. CAUCHY suppose que $\varphi(x)$ soit une fonction monodrome et monogène, c'est-à-dire une fonction qui n'a, ainsi que sa dérivée, qu'une seule valeur pour chaque valeur de x.

IV.

Procédons maintenant à la nouvelle solution.

Désignons par $\varphi(x)$ une fonction de x qui, ainsi que sa dérivée $\varphi'(x)$, soit constamment finie pour des valeurs quelconques de x comprises entre l'infini positif et l'infini négatif, et qui pour ces valeurs extrêmes soit telle qu'on ait

$$\varphi(\pm\infty) = 0, \qquad \varphi'(\pm\infty) = 0. \tag{11}$$

Soit x, y, z trois variables réelles: si nous posons

$$\int_0^{\infty} \varphi'(z[y-x])\,dz = \frac{\varphi(z[y-x]) - \varphi(0)}{y-x}, \tag{12}$$

il est bien clair, d'après la nature de la fonction $\varphi(x)$, que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi) - \varphi(0)}{\chi}\,d\chi \tag{13}$$

doit être nécessairement finie. On peut donc poser

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi) - \varphi(0)}{\chi}\,d\chi = \text{const. finie} = C. \tag{14}$$

Cela posé, multiplions l'équation (12) par $y-x$ et faisons converger z vers l'infini positif.

Tant que la différence $y-x$ est finie, la fonction

$$\varphi(z[y-x]) - \varphi(0), \tag{15}$$

eu égard à la première des égalités (11), se réduira à la constante déterminée $-\varphi'(0)$, et on aura

$$(y-x)\int_0^{\infty} \varphi'(z[y-x])\,dz = -\varphi(0). \tag{16}$$

Mais quand cette différence deviendra infiniment petite on ne peut plus dire que le produit $z(y-x)$, lorsqu'on suppose z infiniment grand, soit lui même infiniment grand, et, par conséquent, que l'on ait $\varphi(z[y-x]) = 0$, quand on pose $z = \pm\infty$. Cette quantité sera généralement égale à une constante indéterminée, quoiqu'il y ait bien des cas où l'on pourra déterminer sa valeur.

Désignant donc par A une quantité constante par rapport à x et y, mais dépendant de la nature de la fonction φ, on peut toujours poser l'équation

$$(y-x)\int_0^{\infty} \varphi'(z[y-x])\,dz = \lim[\varphi'(z[y-x]) - \varphi(0)] = A. \tag{17}$$

Cela posé, il devient très-facile de déterminer en fonction de x la valeur de l'intégrale double

$$\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z[y-x]) f(y)\, dy; \tag{18}$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque de x.

En effet, intégrant par rapport à z depuis $z=0$ jusqu'à $z=z$, on transforme cette intégrale en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(z[y-x]) - \varphi(0)}{y-x} f(y)\, dy; \tag{19}$$

et si l'on pose

$$z(y-x) = \chi, \quad \text{d'où} \quad y = x + \frac{\chi}{z}, \tag{20}$$

elle prendra la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi) - \varphi(0)}{\chi} f(x + \tfrac{\chi}{z})\, dy. \tag{21}$$

Faisant maintenant z égal à l'infini, la fonction $f(x+\frac{\chi}{z})$ se réduit à $f(x)$, excepté pour des valeurs de z qui sont elles-mêmes infinies, et auxquelles il est inutile de faire attention parceque le facteur

$$\frac{\varphi(\chi) - \varphi(0)}{\chi} \tag{22}$$

rend aussi infiniment petite la partie de l'intégrale qui leur correspond. Ayant donc égard à l'égalité (14), l'intégrale double (18) se réduit à $Cf(x)$, et l'on peut, en conséquence, établir la formule

$$f(x) = \frac{1}{C} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z[y-x]) f(y)\, dz\, dy; \tag{23}$$

analogue à celle de Fourier, mais plus générale qu'elle. A son moyen on pourra toujours exprimer une fonction quelconque de x, $f(x)$, continue ou discontinue, à l'aide d'une intégrale double, et cela de plusieurs manières différentes.

Pour donner un exemple, prenons pour $\varphi(x)$ la fonction

$$\varphi(z[y-x]) = (a + z[y-x])\, e^{-z^2(y-x)^2}. \tag{24}$$

Cette fonction, ainsi que sa dérivée, étant constamment finie pour des valeurs quelconques de z comprises entre l'infini positif et l'infini négatif, et satisfaisant d'ailleurs aux conditions exprimées par les équations (14), on peut la prendre pour la fonction que nous avons désignée par $\varphi(z[y-x])$.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi) - \varphi(0)}{\chi} d\chi,$$

ou bien la constante C étant, dans le cas actuel, égale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a+\chi)\, e^{-\chi^2} - a}{\chi} d\chi = 2 \int_0^\infty e^{-\chi^2} d\chi = \frac{2}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi},$$

la formule (23) deviendra

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \cdot [a + z(y-x)]\, e^{-z^2(y-x)^2}}{(y-x)\, dz} f(y)\, dz\, dy. \tag{25}$$

Si les limites de l'intégrale (18) au lieu de $\mp \infty$ se réduisaient à deux constantes finies μ', μ'', on trouverait que sa valeur serait encore $Cf(x)$, si x tombait entre les mêmes limites: elle serait nulle dans le cas contraire.

Je dois remarquer que la formule (23) a été pour la première fois démontrée par M. Liouville dans un des premiers volumes de son Journal de Mathématique. J'ai crû pourtant devoir la démontrer ici de nouveau non seulement parceque cette formule, dont on n'a pas fait la moindre application, a pu restée ignorée des géomètres, mais encore à cause des importantes applications que nous en allons faire.

V.

Supposons maintenant que l'on veut déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui entre sous le signe d'intégration dans l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(x, \theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x). \tag{26}$$

Voici comme on pourra se servir dans cette recherche de la formule (23), ou plutôt de celle-ci

$$f(x,x) = \frac{1}{C} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(z[y-x])\, f(x,y)\, dz\, dy; \tag{27}$$

qui lui est équivalente et qu'on démontre de la même manière.

On doit tâcher premièrement de mettre l'équation proposée sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x,y)\, \varphi_1(y)}{y-x}\, dy = F_1(x). \tag{28}$$

Cela posé, désignant par $\psi(x)$ la fonction qui, dans les calculs du N° précédent, nous avons désignée par $\varphi(x)$, le quotient

$$\frac{(y-x)\int_0^\infty \psi'(z[y-x])\, dz}{A} \tag{29}$$

étant égal à l'unité, l'égalité précédante ne sera aucunement altérée si on le met sous le signe d'intégration. On aura alors

$$\frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \psi'(z[y-x])\, f_1(x,y)\, \varphi_1(y)\, dz\, dy = F_1(x); \tag{30}$$

d'où, en vertu de la formule (27), on tire

$$\frac{C}{A} f_1(x,x)\, \varphi_1(x) = F(x); \tag{31}$$

et par suite

$$\varphi_1(x) = C_1 \frac{F(x)}{f_1(x,x)}, \tag{32}$$

désignant par C_1 le rapport $\frac{A}{C}$. Comme A est une constante indéterminée, C_1 le sera également; on la déterminera pourtant facilement substituant cette expression de $\varphi_1(x)$ dans l'équation (28) et donnant à x une valeur particulière.

La question de déterminer la valeur d'une fonction inconnue entrant sous le signe d'intégration définie serait donc résolue si on pouvait ramener le problème proposé à dépendre d'une équation de la forme (28); or cela est très-facile d'après ce qu'on a vu au N° XXXIV.

VI.

Voici l'ensemble des opérations.

L'équation proposée étant

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \tag{33}$$

nous poserons

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\omega)\,F_1[x,\omega,\Phi(\omega)]\,d\omega, \tag{34}$$

F_1, Φ étant deux fonctions dont nous disposerons arbitrairement et φ_1 la fonction qui vient remplacer φ.

Faisant la substitution, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_1f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)}{\omega - x}\,d\omega = F(x), \tag{35}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$(\omega - x)\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,F_1[x+\theta,\omega,\Phi(\omega)]\,d\theta = {}_1f(x,\omega). \tag{36}$$

L'équation (35) a maintenant la forme qu'il lui faut pour que l'on puisse faire usage de la formule (27); mais pour qu'elle ait cette forme en réalité et pas en apparence seulement, il faut que la fonction qui multiplie $\omega - x$ au premier membre de l'équation (36) ait un facteur de la forme $\frac{1}{\omega - x}$, ce qui exige que l'on fasse

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\omega,\theta)\,F_1[\omega+\theta,\omega,\Phi(\omega)]\,d\omega} = 0. \tag{37}$$

Cette équation détermine $\Phi(\omega)$, et on peut disposer de la forme de la fonction F_1 pour faciliter le calcul.

On finit maintenant la résolution du poblème, soit en se servant de la formule (27), soit en développant tous les calculs comme suit.

Multiplions la quantité qui est sous le signe d'intégration au premier membre de l'équation (35) par le facteur

$$\frac{(\omega - x)\int_{0}^{\infty} \psi'(z\,[\omega - x])\,dz}{A}, \tag{38}$$

équivalent, comme on sait, à l'unité; on aura

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\psi'(z[\omega-x])\,{}_1f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)\,d\omega\,dz \;=\; F(x). \tag{39}$$

Intégrant maintenant par rapport à z, depuis $z=0$ jusqu'à une valeur z que nous ferons après égale à l'infini; on aura

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(z[\omega-x])-\psi(0)}{\omega-x}\,{}_1f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)\,d\omega \;=\; F(x); \tag{40}$$

ou bien

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\chi)-\psi(0)}{\chi}\,{}_1f(x,x+\tfrac{\chi}{z})\,\varphi_1(x+\tfrac{\chi}{z})\,d\chi \;=\; F(x), \tag{41}$$

si l'on fait

$$z(\omega-x)=\chi \quad \text{d'où} \quad \omega=x+\frac{\chi}{z}. \tag{42}$$

Posant maintenant $z=\infty$, et suivant le raisonnement du N° IV, on aura

$${}_1f(x,x)\,\varphi_1(x)\,\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\chi)-\psi(0)}{\chi}\,d\chi \;=\; F(x): \tag{43}$$

d'où, en désignant par C une constante égale à l'unité divisée par

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\chi)-\psi(0)}{\chi}\,d\chi, \tag{44}$$

on déduit

$$\varphi_1(x) \;=\; C\,\frac{F(x)}{{}_1f(x,x)}. \tag{45}$$

Comme substituant cette expression de $\varphi_1(x)$ dans l'équation (35) elle doit être identique, on peut déterminer la constante C donnant à x une valeur quelconque particulière a. On trouvera

$$C \;=\; \frac{F(a)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_1f(a,\omega)\,F(\omega)}{(\omega-a)\,{}_1f(\omega,\omega)}\,d\omega}. \tag{46}$$

La fonction $\varphi_1(x)$ ayant été complètement déterminée, l'équation (34) donne après

$$\varphi(x) \;=\; C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{{}_1f(\omega,\omega)}\,F_1[x,\omega,\Phi(\omega)]\,d\omega \tag{47}$$

pour la fonction cherchée $\varphi(x)$.

VII.

La méthode que nous venons d'employer pour tirer de l'équation (35) la valeur de $\varphi_1(\omega)$ ne diffère pas au fond de celle dont les géomètres se servent, soit pour faciliter les intégrations, soit pour lever l'indétermination des formules différentielles, et qui consiste à multiplier la quantité qui est sous le signe d'intégration par $\frac{\psi(\varepsilon\omega)}{\psi(0)}$, ε étant une quantité infiniment petite que l'on doit faire égale à zéro après les intégrations, ou bien par $\frac{\psi(\varepsilon\omega)+\psi_1\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)}{\psi(0)}$, ψ_1 étant une fonction telle que l'on ait $\psi_1(\pm\infty) = 0$.

C'est ainsi que pour démontrer la formule de FOURIER

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha(x-x')f(x')\,d\alpha\,dx' \tag{48}$$

on multiple la fonction entrant sous le signe d'intégration par $e^{-g\alpha}$, g étant une quantité infiniment petite et que l'on suppose égale à zéro après les intégrations.

Or, notre méthode ne diffère presque pas de cela, car après avoir obtenu la transformée (35), nous n'avons fait que multiplier la fonction entrant sous le signe d'intégration par le facteur

$$\frac{(\omega-x)\int_0^z\psi'(z[\omega-x])\,dz}{A}, \tag{49}$$

équivalent à l'unité quand on fait z égal à l'infini.

On pourrait pourtant objecter à l'introduction dans les calculs d'une quantité indéterminée, ainsi que nous l'avons fait. Mais nous répondons à cela que nous ne faisons que ce que l'on fait ordinairement, quoique de prime abord on ne le voie pas. Cela tient à ce qu'on passe le plus souvent, dans la théorie des intégrales définies, un peu trop vite sur une proposition qu'on rencontre à tout moment, et à laquelle si l'on ne fait pas attention, on peut être conduit quelques fois à des résultats fautifs. Pour le faire mieux voir, reprenons nos calculs en tâchant d'y mettre tout la rigueur désirable: après examinons la démonstration que l'on donne très-souvent de la formule de FOURIER, ou d'autres formules analogues: on verra que je ne me sers pas, pour résoudre le problème (33), d'aucune proposition délicate sur la théorie des intégrales définies dont on n'ait pas fait usage avant moi.

En effet, la quantité

$$(\omega-x)\int_0^\infty\psi'(z[\omega-x])\,dz \tag{50}$$

étant égale, tant que la différence $\omega - x$ n'est pas infiniment petite, à la constante déterminée $-\psi(0)$, et dans le cas contraire à la constante indéterminée

$$\psi(\mu\nu) - \psi(0), \tag{51}$$

(indéterminée à cause de l'indétermination des deux constantes μ et ν, résultant de ce que $\frac{1}{z}$ et $\omega - x$ étant deux quantités du même ordre de grandeur, on pourra supposer $z = \frac{\mu}{\varepsilon}$, $\omega - x = \nu\varepsilon$, ε étant une quantité infiniment petite) on n'altère pas la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)}{\omega-x}\,d\omega \tag{52}$$

si l'on multiplie tous ses éléments par le facteur (50), pourvu qu'on divise après celui qui répond à $\omega = x + d\omega$ par (51) et tous les autres par $-\psi(0)$. En prenant premièrement

$$-\frac{1}{\psi(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\psi'(z[\omega-x])\,{}_1f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)\,d\omega\,dz \tag{53}$$

on aura tous les éléments de l'intégrale (52) multipliés par le facteur (50) et divisés par $-\psi(0)$: prenant après l'élément de (52) correspondant à $\omega = x + d\omega$, savoir ${}_1f(x, x+d\omega)\,\varphi_1(x+d\omega)$, multipliant par l'intégrale (50) quand on y fait $\omega = x + d\omega$, divisant par $-\psi(0)$ et retranchant après le résultat de la fonction (53), on aura une expression représentant tous les éléments de l'intégrale (52), moins celui qui répond à $\omega = x + d\omega$, multipliés par (50) et divisés par $-\psi(0)$. Il n'y a plus qu'à ajouter cet élément multiplié par le facteur (50), lorsqu'on y fait $\omega = x + d\omega$, et divisé par (51) pour former l'expression qu'on voulait avoir, savoir

$$\frac{1}{-\psi(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\psi'(z[\omega-x])\,{}_1f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)\,d\omega\,dz - \frac{d\omega\int_0^{\infty}\psi'(d\omega\,z)\,dz}{-\psi(0)}\,{}_1f(x,x+d\omega)\,\varphi_1(x+d\omega)$$
$$+\frac{d\omega\int_0^{\infty}\psi'(d\omega\,z)\,dz}{\psi(\mu\nu)-\psi(0)}\,{}_1f(x,x+d\omega)\,\varphi_1(x+d\omega); \tag{54}$$

expression qui n'a pas une valeur différente de l'intégrale (52) et qu'on peut, en conséquence, égaler à $F(x)$. On aura donc

$$-\frac{1}{\psi(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\psi'(z[\omega-x])\,{}_1f(x,\omega)\,\varphi_1(\omega)\,d\omega\,dz + \frac{d\omega\int_0^{\infty}\psi'(d\omega\,z)\,dz}{\psi(0)}\,{}_1f(x,x+d\omega)\,{}_1\varphi(x+d\omega)$$
$$+\frac{d\omega\int_0^{\infty}\psi'(d\omega\,z)\,dz}{\psi(\mu\nu)-\psi(0)}\,{}_1f(x,x+d\omega)\,\varphi_1(x+d\omega) = F(x); \tag{55}$$

pour transformée de l'équation (35).

L'intégrale double qui entre dans cette équation est équivalente, d'après la formule (27), à $C\,{}_1f(x,x)\,\varphi_1(x)$, C étant une constante finie donnée par l'égalité (14), quand on y remplace φ par ψ. Quant à l'expression

$$d\omega\int_0^{\infty}\psi'(d\omega\,z)\,dz, \tag{56}$$

l'intégrant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = z$, et faisant, comme plus haut, $d\omega = \varepsilon\nu$, $z = \frac{\mu}{\varepsilon}$, ε étant une quantité infiniment petite, on aura

$$\psi(\mu\nu) - \psi(0). \tag{57}$$

L'équation précédente prendra donc la forme

$$C_1\,{}_1f(x,x)\,\varphi_1(x) = F(x), \tag{58}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{1}{-\psi(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\chi)-\psi(0)}{\chi}\,d\chi + \frac{\psi(\mu\nu)-\psi(0)}{\psi(0)} + 1 = C_1, \tag{59}$$

et si l'on remplace ${}_1f(x, x+d\omega)\,\varphi_1(x+d\omega)$ par ${}_1f(x,x)\,\varphi_1(x)$.

Nous arrivons ainsi au même résultat auquel nous sommes arrivés plus haut, et on voit mieux comme la constante C, indéterminée à cause de μ et ν, entre dans l'expression de $\varphi_1(x)$.

Voyons maintenant ce que l'on fait généralement pour lever indétermination de certaines intégrales définies ou bien pour faciliter leur intégration.

Soit

$$\int_0^\infty f(x, \omega)\, d\omega, \tag{60}$$

par exemple. Désignant par g une quantité infiniment petite, on remplace très-souvent cette intégrale par cette autre

$$\int_0^\infty \frac{\psi(g\omega)}{\psi(0)} f(x, \omega)\, d\omega; \tag{61}$$

ce qui revient à multiplier chaqu'un de ses éléments par $\frac{\psi(g\omega)}{\psi(0)}$. Or, cela, tant que les éléments correspondent à des valeurs finies de ω, n'altère aucunement les résultats en faisant g converger vers zéro, car le facteur $\frac{\psi(g\omega)}{\psi(0)}$ deviendra sensiblement égal à l'unité: il n'en est pas de même pour les éléments qui correspondent à des valeurs infinies de ω, car cette variable devient du même ordre de grandeur que $\frac{1}{g}$, et le produit $g\omega$ pouvant être égal à une quantité finie μ, ces éléments de l'intégrale, quand on passe à la limite, en faisant converger g vers zéro, ne se trouveront pas comme les autres multipliés simplement par l'unité, mais par une quantité indéterminée $\frac{\psi(\mu)}{\psi(0)}$. L'intégrale (61) aura donc une valeur différente de (60) à moins que les éléments qui répondent à de très-grandes valeurs de ω ne s'évanouissent pas, ce qui est ordinairement le cas pour que l'intégrale ne soit pas indéterminée.

Si l'on voulait encore remplacer l'intégrale (60) par

$$\int_0^\infty \frac{\psi\left(\frac{g}{\omega}\right)}{\psi(0)} f(x, \omega)\, d\omega, \tag{62}$$

on aurait un résultat fautif, excepté si les éléments de l'intégrale qui répondent à des valeurs infiniment petites de ω s'évanouissent avec cette variable. Mais si au contraire les éléments de l'intégrale qui correspondent à des valeurs finies de ω sont infiniment petits, tandis que ceux qui correspondent à des valeurs infiniment petites de cette variable sont les seuls qui aient une grandeur finie, l'intégrale (62), quand on fait converger g vers zéro, ne deviendra pas plus égale à (60), mais à cette fonction multipliée par $\frac{\psi(\mu)}{\psi(0)}$ ou bien par une autre constante indéterminée.

Ce dernier cas est celui de nos calculs, car en remplaçant (35) par (39) on n'a fait que multiplier chaque élément de l'intégrale par l'unité, excepté l'élément correspondant à $\omega = x$ qui a été multiplié par une constante indéterminée. Or, il résulte de nos calculs, comme on l'a vu, que l'intégrale (35) est nulle excepté pour des valeurs de ω qui sont très-peu différentes de x.

VIII.

Si, sans avoir fait attention aux considérations qui précèdent, on prenait des formules comme

$$(\omega - x)\int_0^{\infty} \sin z\,(\omega - x)\,dz = 1, \quad \frac{\omega - x}{1 - \cos a}\int_0^{\infty} \frac{d\cdot \cos[a + z\,(\omega - x)]e^{-z^2(\omega^2 - x)^2}}{(\omega - x)\,dz}\,dz = 1, \text{ etc.} \quad (63)$$

démontrées dans la supposition d'être $\omega - x$ une quantité positive et finie, et on voulait à leur moyen transformer l'intégrale (35) en une intégrale double de la forme (39), on trouverait toujours pour $\varphi_1(x)$ des expressions de la forme

$$\varphi_1(x) = C\frac{F(x)}{f(x, x)}, \quad (64)$$

mais différant les unes des autres par la constante C, comme on devrait s'y attendre. C'est ce que le lecteur peut vérifier par lui-même.

IX.

Les détails dans lesquel nous sommes entrés montrent assez clairement que la méthode donnée à la page 76 ne laisse rien à désirer ni sous le rapport de la rigueur ni sous celui de la généralité. Ce que nous venons de faire relativement à l'équation (7), à une seule variable, peut s'appliquer à des équations du même genre renfermant un nombre quelconque de variables. Ainsi si vous avez l'équation

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x_1, y_1, \theta_1, \theta_2)\,\varphi(x + \theta_1, y + \theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2 = F(x, y), \quad (65)$$

on commencera par la mettre sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x, y, \omega_1, \omega_1)\,\varphi_1(\omega_1, \omega_2)}{(x - \omega_1)(y - \omega_2)}\,d\omega_1\,d\omega_2 = F(x, y); \quad (66)$$

cela fait, par un raisonnement analogue à celui de la page 75 on tirera de cette équation

$$\varphi_1(x, x) = C\frac{F(x, y)}{f_1(x, y, x, y)}; \quad (67)$$

C étant une constante indéterminée.

On fera la même chose quelle que soit le nombre des variables.

X.

Les méthodes que nous avons données pour résoudre l'équation (7) exigent toutes la résolution d'une certaine équation transcendante. On peut éviter le plus souvent cette résolution. Pour le faire

voir, prenons un exemple particulier et supposons que l'on veut déterminer la fonction qui mise a la place de $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \theta)\, \varphi(x + \theta)\, d\theta = 0. \tag{68}$$

D'après ce que l'on a vu à la page 54, on trouve pour représenter $\varphi(x)$ une certaine fonction de x et a_n, a_n étant une racine de l'équation (342). Je désignerai cette fonction par $F_1(x, a_n)$, en sorte qu'on aura

$$\varphi(x) = F_1(x, a_n). \tag{69}$$

Mettant maintenant dans cette équation au lieu de a_n les différentes racines de (342), ou aura autant de valeurs particulières de $\varphi(x)$, toutes satisfaisant à l'équation proposée (68); et comme cette équation est linéaire, il est évident que leur somme la satisfera également. On aura donc

$$\varphi(x) = F_1(x, a_1) + F_1(x, a_2) + F_1(x, a_3) + \text{etc.} \tag{70}$$

Or le second membre de cette équation étant une fonction symmétrique de toutes les racines de l'équation (342) on pourra très souvent obtenir sa valeur sous forme finie à l'aide des formules sommatoire (92), (93) etc. et d'autres du même genre données par M. Cauchy.

Au lieu de prendre toutes les racines de l'équation (342) pour former l'expression du second membre de l'équation (70), on pourrait seulement prendre celles dont les modules sont comprises entre deux limites données. On trouverait alors pour l'expression de $\varphi(x)$ une fonction dont on pourrait obtenir très souvent la valeur sous forme finie en s'appuyant sur quelques formules sommatoires dues encore à M. Cauchy. (V. ses Exercices de Mathématique, t. I.)

XI.

Terminons ce Mémoire par une observation sur la manière d'exprimer les fonctions à l'aide d'intégrales définies.

Exécutant dans la formule (23) l'intégration par rapport à z, depuis $z = 0$ jusqu'à une valeur z de cette variable que nous ferons après égale à l'infini, on aura

$$f(x) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi[z(y - x)] - \varphi(0)}{y - x} f(y)\, dy. \tag{71}$$

D'après cette formule on voit comme on peut représenter une fonction quelconque générale $f(x)$ au moyen d'une seule intégrale définie. Cette intégrale, il est vrai, à cause de la quantité z, équivaut à une intégrale définie double, cependant il est bien plus convenable de mettre la fonction $f(x)$ sous cette forme que sous celle que lui donne le théorème de Fourier ou d'autres du même genre que nous avons donnés. A son moyen on pourra démontrer tout ce qui l'a été à l'aide de la formule (88).

On peut construire des formules analogues pour des fonctions renfermant un nombre quelconque de variables.

Sur la détermination des constantes, qui, dans les problèmes de Physique mathématique, entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, en fonction de l'état initial du système.

I.

On lit dans le Journal de M. LIOUVILLE (t. II, p. 439) :

«Solution nouvelle

d'un problème d'Analyse, relatif aux phénomènes thermo-mécaniques.

Par JOSEPH LIOUVILLE.

Ce problème qui consiste à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} - b^2 x \int_0^1 x \frac{du}{dt}\, dx, \tag{1}$$

de telle manière qu'on ait

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1 \tag{2}$$

$$\frac{du}{dx} + bu = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \tag{3}$$

$$u = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad \text{depuis} \quad x = 0 \quad \text{jusqu'à} \quad x = 1, \tag{4}$$

a été déjà traité de deux manières différentes par M. DUHAMEL, dans son second Mémoire sur les Phénomènes thermo-mécaniques. L'auteur a d'abord fait usage d'une méthode assez compliquée, mais très ingénieuse, que M. POISSON a donnée dans ses premières recherches sur la théorie de la chaleur. Reprenant ensuite la question d'une autre manière, il a, dans une seconde solution, suivi la méthode si connue qui consiste à représenter la valeur complète de u par la somme d'un nombre infini de termes dont chacun satisfait aux trois premières équations et renferme implicitement une constante arbitraire, ce qui permet de satisfaire aussi à la condition $u = f(x)$ pour $t = 0$. On est ainsi conduit à développer la fonction $f(x)$ en une série de la forme

$$f(x) = H_1 V_1 + H_2 V_2 + \cdots\cdots + H_n V_n + \cdots\cdots \tag{5}$$

$H_1, H_2, \cdots H_n, \cdots$ étant des constantes, et $V_1, V_2, \cdots V_n \cdots$ des fonctions connues de x. On détermine H_n en multipliant les deux membres de l'équation précédente par un facteur convenable et

en intégrant ensuite entre les limites $x = 0$, $x = 1$, de manière à faire disparaître tous les coefficients H_1, H_2, $\cdots$ excepté H_n. M. DUHAMEL semble regarder cette détermination de H_n comme offrant la difficulté principale qu'il avait à vaincre pour résoudre le problème proposé.»

II.

D'après les mots que nous venons de voir, il parait que M. DUHAMEL n'a pas regardé le problème de déterminer H_n dans l'équation (5) comme un de ceux qu'on pouvait résoudre en suivant les méthodes connues. En effet, il dit dans son Mémoire (V. Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XV, p. 45): »Dans la question actuelle le facteur propre à faire disparaître par l'intégration tous les coefficients »moins un, ne se découvre pas immédiatement; et c'est pour cela que j'ai présenté d'abord l'analyse »qui précède et qui est au reste celle qui m'a conduit à la solution.»

Plus loin (page 47) il ajoute: «Le facteur par lequel il faut multiplier les deux membres de »l'équation (5), pour que l'intégration entre les limites 0 et 1 fasse disparaître tous les coefficients »excepté celui qu'on veut déterminer n'est pas V_n comme on pourrait le présumer. Pour le dé- »couvrir, etc.»

Ces dernier mots montrent assez clairement que M. DUHAMEL regardait comme nouveau le problème de déterminer H_n dans l'équation (5), et comme d'ailleurs M. LIOUVILLE, en donnant une solution du même problème raisonne toujours sur la forme particulière des fonctions qui y entrent, sans faire aucune observation sur la possibilité de généraliser sa solution, ni sur l'analogie que sa méthode pourrait avoir avec d'autres déjà connues, je crois devoir remarquer que cette détermination peut se faire suivant la méthode donnée par l'illustre auteur de la Théorie de la Chaleur, présentée sous la forme simple et concise qu'elle a dans les écrits de POISSON.

III.

Représentons l'intégrale de la proposée par

$$u = \Sigma H_n V_n e^{-\rho_n t}; \tag{6}$$

mettant cette expression de u dans l'équation (1), on aura

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} + \rho_n V_n + b^2 \rho_n x \int_0^1 x V_n \, dx = 0, \tag{7}$$

pour déterminer V_n. Sans nous inquiéter de cette détermination, supposons-la faite, et les conditions (2) et (3) satisfaites; chose facile d'après les deux constantes arbitraires que l'intégrale de l'équation précédente doit avoir.

La question maintenant c'est de satisfaire à l'équation $u = f(x)$ pour $t = 0$; ou, autrement, de déterminer la valeur de H_n dans l'égalité

$$f(x) = H_1 V_1 + H_2 V_2 + \cdots\cdots + H_n V_n + \text{etc.}, \tag{8}$$

qui n'a lieu que pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$ et $x = 1$.

Substituant la valeur précédente de u dans les équations (2) et (3), on a

$$V_n = 0 \text{ pour } x = 0, \quad \frac{dV_n}{dx} + h V_n = 0 \text{ pour } x = 1. \tag{9}$$

Multiplions l'équation (1) par $V_n\,dx$ et intégrons entre les limites $x = 0$ et $x = 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{du}{dt} V_n\,dx = \int_0^1 V_n \frac{d^2u}{dx^2}\,dx - b^2 \int_0^1 x V_n\,dx \int_0^1 x \frac{du}{dt}\,dx. \tag{10}$$

Mais l'intégration par parties donnera

$$\int_0^1 V_n \frac{d^2u}{dx^2}\,dx = \left(V_n \frac{du}{dx} - u \frac{dV_n}{dx}\right)_0^1 + \int_0^1 u \frac{d^2V_n}{dx^2}\,dx; \tag{11}$$

cette équation prend la forme

$$\int_0^1 V_n \frac{du^2}{dx^2}\,dx = -\rho_n \int_0^1 V_n u\,dx - b^2 \rho_n \int_0^1 ux\,dx \int_0^1 x V_n\,dx, \tag{12}$$

mettant dans le second membre au lieu de $\frac{d^2V_n}{dx^2}$ sa valeur déduite de l'équation (7), et faisant attention à ce que, en vertu des égalités (2) et (9), on a

$$V_n \frac{du}{dx} - u \frac{dV_n}{dx} = 0 \text{ pour } x = 0, \tag{13}$$

$$V_n \frac{du}{dx} - u \frac{dV_n}{dx} = 0 \text{ pour } x = 1. \tag{14}$$

Faisant pour abréger $\int_0^1 u V_n\,dx = v$, l'équation (10) moyennant (12), se réduit à

$$\frac{dv}{dt} + l_n v = -b^2 \rho_n \int_0^1 ux\,dx \int_0^1 x V_n\,dx - b^2 \int_0^1 x V_n\,dx \int_0^1 x \frac{du}{dt}\,dx; \tag{15}$$

ou à celle-ci

$$\frac{d\left(v + b^2 \int_0^1 x V_n\,dx \int_0^1 x u\,dx\right)}{dt} + \rho_n \left(u + b^2 \int_0^1 x V_n\,dx \int_0^1 xu\,dx\right) = 0; \tag{16}$$

d'où on déduit

$$\int_0^1 u V_n\,dx + b^2 \int_0^1 x V_n\,dx \int_0^1 xu\,dx = C_n e^{-\rho_n t}, \tag{17}$$

C_n étant une constante arbitraire, qu'on détermine faisant $t = 0$ et se rappelant qu'alors $u = f(x)$: on aura

$$\int_0^1 f(x) V_n\,dx + b^2 \int_0^1 x V_n\,dx \int_0^1 x f(x)\,dx = C_n. \tag{18}$$

Substituant maintenant dans l'équation (17) au lieu de u sa valeur donnée par l'égalité (6), il est clair qu'on aura [1]:

$$\int_0^1 V_m V_n\,dx + b^2 \int_0^1 x V_m\,dx \int_0^1 x V_n\,dx = 0, \tag{19}$$

tant que m est différent de n; 2°

$$H_n\left[\int_0^1 V_n^2\,dx + b^2\left(\int_0^1 V_n\,x\,dx\right)^2\right] = C_n; \tag{20}$$

quand ces deux quantités déviennent égales.

La question se trouve résolue et notre solution s'accorde avec celles des géomètres cités.

Ainsi la détermination de H_n dans l'équation (5), où V_n est une fonction de x, satisfaisant à une équation de la forme (1) ou à d'autres de la même nature, se fait suivant mot à mot la méthode tracée par Poisson. L'équation (19) montre, comme dans la même théorie, que toutes les racines $l_1\ l_2 \cdots l_n \cdots$ sont réelles.

Démonstration de quelques théorèmes généraux pour la comparaison de nouvelles fonctions transcendantes.

I.

Théorème I. Etant donnée l'équation $F(x, y) = 0$ entre deux variables, algébrique par rapport à x, mais algébrique ou transcendante relativement à y, et telle, par conséquent, qu'on ait

$$x^m - \frac{df(y)}{dy} x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \cdots\cdots + p_{m-1} x + p_m = 0; \qquad (1)$$

$p_2, p_3, \cdots p_{m-1}, p_m, f(y)$ étant des fonctions quelconques de y: représentant par $\varphi(x)$ une valeur de y qu'on suppose déduite de l'équation précédente; faisant

$$\int \varphi(x)\, dx = \psi(x),$$

et représentant par $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m$ les m racines de l'équation (1), x étant régardé comme l'inconnue; on aura

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = y \frac{df(y)}{dy} - f(y) + C \qquad (2)$$

C étant une constante arbitraire.

Demonstration. Prénons la formule connue

$$\int y\, dx + \int x\, dy = xy + C; \qquad (3)$$

passant la seconde intégrale pour le second membre et mettant au lieu de y sa valeur déduite de l'équation (1) dans le premier, on aura

$$\int \varphi(x)\, dx = xy - \int x\, dy + C,$$

ou

$$\psi(x) = xy - \int x\, dy + C;$$

d'où, mettant au lieu de x toutes les racines de l'équation (1), cette dernière variable étant regardée comme l'inconnue, et somment membre à membre les différentes équations qui en résultent, on aura

$$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\psi(x_3)+\cdots+\psi(x_m) = y(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m) - \int (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m)\, dy \qquad (4)$$

mais, d'après les propriétés connues des équations algébriques, les fonctions symmétriques qui multiplient y et dy peuvent être exprimées en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation (1), tellement qu'on a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_m = \frac{df(y)}{dy};$$

l'équation précédente prendra donc la forme

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = y\frac{df(y)}{dy} - f(y) + C;$$

qui est le théorème qu'on voulait démontrer.

II.

Si le coefficient du second terme de l'équation (1) se réduit à une constante, ou si $f(y) = y$, le théorème (2) donnera alors celui-ci

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = C, \qquad (5)$$

qui est très remarquable et indique qu'il y a une infinité de fonctions transcendantes, qui, sommées avec d'autres de la même espèce, qui ne diffèrent que par leur amplitude mais où les paramètres sont les mêmes donnent une constante. Cette propriété n'appartient donc pas seulement aux fonctions $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique de x.

III.

Si l'équation $F(x, y) = 0$, au lieu de prendre la forme (1), avait celle-ci

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + p_{m-1}x + p_m = 0; \qquad (6)$$

p_1, p_2, p_3, etc. étant des fonctions de y absolument quelconques, le théorème (2) serait remplacé par celui-ci

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = -p_1 y + \int p_1\,dy + C; \qquad (7)$$

et l'évaluation des transcendants $\psi(x)$ dépendrait alors de $\int p_1\,dy$; généralement bien plus simple qu'elles.

Si vous, dans l'équations (2), supposez que $f(y)$ se réduise successivement à des fonctions algébriques, logarithmiques, euleriennes, elliptiques, etc. vous aurez des transcendants très compliqués dout l'évaluation pourtant dèpend de ces fonctions élémentaires.

IV.

Avant d'aller plus loin, donnons un exemple.

Supposons que l'équation (1) se réduise à

$$x^2 + x = e^y. \qquad (8)$$

$f(y)$ étant alors égal à $-y$, l'équation (2) se réduit à l'équation (5), qui, dans le cas particulier que nous considérons, se réduit elle-même à

$$\int_h^{x_1} \log(x^2 + x)\, dx + \int^{x_2} \log(x^2 + x)\, dx = C,$$

faisant attention à ce que y, déduit de l'équation (8), est égal à $\log(x^2 + x)$ et représentant par x_1, x_2 les deux racines de la même équation résolue relativement à x, savoir:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4e^y} \qquad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4e^y}.$$

L'intégration donne

$$\int \log(x^2 + x)\, dx = x(\log x - 1) + x[\log(x + 1) - 1] + \log(x + 1);$$

en y mettant au lieu de x successivement ses valeurs x_1, x_2 et faisant la somme des résultats, on trouve $2 + \pi\sqrt{-1}$: mettant dans la même équation h et k au lieu de x et désignant par H et K les quantités qui en résultent, le premier membre de cette équation se réduit à $2 + \pi\sqrt{-1} - H - K$, c'est-à-dire à une constante comme le second.

V.

Théorème II. Représentant par $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ deux équations entre les trois variables x, y, z, algébriques relativement à x, mais algébriques ou transcendantes relativement à y et z; c'est-à-dire de la forme

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m = 0, \tag{9}$$

$$x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \cdots + q_{n-1} x + q_n = 0; \tag{10}$$

$p_1\, p_2 \cdots p_m$, $q_1\, q_2 \cdots q_n$ étant des fonctions quelconques de y et z, algébriques ou transcendantes: si $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ sont les valeurs de y et z déduites de ces équations, et si l'on pose

$$\int \varphi_1(x)\, \varphi_1'(x)\, dx = \psi(x);$$

représentant par $x_1, x_2, x_3 \cdots x_m$ les racines de l'équation (9), et par ${}_1x, {}_2x, {}_3x \cdots {}_nx$ celles de l'équation (10), x étant regardée comme l'inconnue, on aura

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots + \psi(x_m) = C + \psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \psi({}_3x) + \cdots + \psi({}_nx), \tag{11}$$

si $p_1 = q_1$; et

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots + \psi(x_m) &= C \\ \psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \psi({}_3x) + \cdots + \psi({}_mx) &= C_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

si ces quantités sont constantes; mais si, différentes l'une de l'autre, elles sont telles qu'on ait

$$p_1 = \frac{d \cdot \tilde{\omega}(yz)}{d \cdot (yz)}, \quad q_1 = \frac{d \cdot \tilde{\omega}_1(zy)}{d \cdot (yz)};$$

le produit yz étant traité comme une variable indépendante, on aura finalement

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots + \psi(x_m) &= -yz\frac{d \cdot \tilde{\omega}(zy)}{d \cdot (zy)} + \tilde{\omega}(zy) + C \\ \psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \psi({}_3x) + \cdots + \psi({}_nx) &= -yz\frac{d \cdot \tilde{\omega}_1(zy)}{d \cdot (zy)} + \tilde{\omega}_1(zy) + C_1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Démonstration. Prenons la formule connue

$$\int yz\,dx + \int yx.dz + \int xz\,dy = xyz + C;$$

mettons dans la première intégrale au lieu de y et z leurs valeurs $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ et transportons les autres intégrales pour le second membre; on aura

$$\int \varphi(x)\ \varphi_1(x)\,dx = xyz - \int yx\ dz - \int zx\,dy + C. \tag{14}$$

Substituons dans cette équation successivement toutes les racines de l'équation (9), et sommons membre à membre les équations qui en résulteront; on aura

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = -p_1 yz + \int p_1 y\,dz + \int p_1 z\,dy \tag{15}$$

puisqu'on a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_m = -p_1.$$

Substituant après dans la même équation au lieu de x les n racines de l'équation (10); faisant attention à ce que

$${}_1x + {}_2x + {}_3x + \cdots\cdots + {}_nx = -q_1,$$

et sommant membre à membre les équations qui en résultent, on aura

$$\psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \psi({}_3x) + \cdots\cdots + \psi({}_nx) = -q_1 zy + \int q_1 y\,dz + \int q_1 z\,dy + C. \tag{16}$$

Or, si $p_1 = q_1$ en faisant la soustraction des équations (15) et (16) membre à membre, on trouve le théorème (11). Si p_1 et q_1 sont constantes, les intégrales des seconds membres des équations ci-dessus se réduisant à $p_1 zy$, $q_1 zy$ sont exactement détruits par les termes $-p_1 zy$, $-q_1 zy$ qui s'y trouvent; et le théorème (12) aura lieu. Enfin, si

$$p_1 = \frac{d\cdot\tilde{\omega}(yz)}{d\cdot(yz)}, \qquad q_1 = \frac{d\cdot\tilde{\omega}_1(yz)}{d\cdot(yz)};$$

faisant attention à ce que

$$\int \frac{d\cdot\tilde{\omega}(yz)}{d\cdot(yz)}\,y\,dz + \int \frac{d\cdot\tilde{\omega}(yz)}{d\cdot(yz)}\,z\,dy = \tilde{\omega}(yz),$$

$$\int \frac{d\cdot\tilde{\omega}_1(yz)}{d\cdot(yz)}\,y\,dz + \int \frac{d\cdot\tilde{\omega}_1(yz)}{d\cdot(yz)}\,z\,dy = \tilde{\omega}_1(yz),$$

nous retrouvons le théorème (13).

VI.

Théorème III. Ayant les équations

$$\left.\begin{aligned} x^m + {}_1p_1 x^{m-1} + {}_1p_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + {}_1p_{m-1}x + {}_1p_m &= 0 \\ x^m + {}_2p_1 x^{m-1} + {}_2p_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + {}_2p_{m-1}x + {}_2p_m &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x^{\lambda m} + {}_\lambda p_1 x^{\lambda m-1} + {}_\lambda p_2 x^{\lambda m-2} + \cdots\cdots + {}_\lambda p_{\lambda m-1}x + {}_\lambda p_{\lambda m} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

où les coefficients des différentes puissances de x sont des fonctions quelconques algébriques, ou transcendantes des λ variables y, z, u, ·····, et supposant que

$$\left.\begin{array}{l} {}_1x_1 \quad {}_1x_2 \quad {}_1x_3 \cdots\cdots {}_1x_{1m} \\ {}_2x_1 \quad {}_2x_2 \quad {}_2x_3 \cdots\cdots {}_2x_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_\lambda x_1 \quad {}_\lambda x_2 \quad {}_\lambda x_3 \cdots\cdots {}_\lambda x_{\lambda m} \end{array}\right\} \qquad (18)$$

soient les racines respectives des mêmes équations; représentant encore par

$$y = \varphi(x) \quad z = \varphi_1(x) \quad u = \varphi_2(x) \quad \text{etc.}\ .$$

les valeurs de ces variables supposées déduites du système (17), et posant

$$\int \varphi(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \cdots\cdots dx = \psi(x),$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \psi({}_1x_1) + \psi({}_1x_2) + \psi({}_1x_3) + \cdots\cdots + \psi({}_1x_{1m}) = C_1 \\ \psi({}_2x_1) + \psi({}_2x_2) + \psi({}_2x_3) + \cdots\cdots + \psi({}_2x_{2m}) = C_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi({}_\lambda x_1) + \psi({}_\lambda x_2) + \psi({}_\lambda x_3) + \cdots\cdots + \psi({}_\lambda x_{\lambda m}) = C_\lambda \end{array}\right\} \qquad (19)$$

si ${}_1p_1$, ${}_2p_1$, $\cdots\cdots {}_\lambda p_1$ sont des quantités constantes: si toutes ces quantités, étant quelconques, sont égales entre elles, on aura $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ équations comme celle-ci

$$\psi({}_1x_1) + \psi({}_1x_2) + \psi({}_1x_3) + \cdots + \psi({}_1x_{1m}) = \psi({}_2x_1) + \psi({}_2x_2) + \psi({}_2x_3) + \cdots + \psi({}_2x_{2m}) + C; \qquad (20)$$

si elles sont respectivement égales à

$$\frac{d\cdot\tilde{\omega}_1(yzu\cdots\cdots)}{d\cdot(yzu\cdots\cdots)} \quad \frac{d\cdot\tilde{\omega}_2(yzu\cdots\cdots)}{d\cdot(yzu\cdots\cdots)} \quad \frac{d\cdot\tilde{\omega}_3(yzu\cdots\cdots)}{d\cdot(yzu\cdots\cdots)} \text{ etc.}, \qquad (21)$$

on aura

$$\left.\begin{array}{l} \psi({}_1x_1 + \psi({}_1x_2) + \cdots\cdots + \psi({}_1x_{1m}) = -yzu\cdots\dfrac{d\cdot\tilde{\omega}_1(yzu\cdots)}{d\cdot(yzu\cdots)} + \tilde{\omega}_1(yzu\cdots) + C_1 \\ \psi({}_2x_1) + \psi({}_2x_2) + \cdots\cdots + \psi({}_2x_{2m}) = -yzu\cdots\dfrac{d\cdot\tilde{\omega}_2(yzu\cdots)}{d\cdot(yzu\cdots)} + \tilde{\omega}_2(yzu\cdots) + C_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi({}_\lambda x_1) + \psi({}_\lambda x_2) + \cdots\cdots + \psi({}_\lambda x_{\lambda m}) = -yzu\cdots\dfrac{d\cdot\tilde{\omega}_\lambda(yzu\cdots)}{d\cdot(yzu\cdots)} + \tilde{\omega}_\lambda(yzu\cdots) + C_\lambda \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Finalement si quelques unes des quantités ${}_1p_1$, ${}_2p_1$ ... ${}_\lambda p_1$ sont égales entre elles, d'autres constantes et d'autres de la forme (21), nous aurons pour la comparaison des fonctions $\psi(x)$ des équations des trois formes (19), (20) et (22).

Démonstration. En nous aidant de la formule

$$\int xyz\cdots dx + \int xyu\cdots dz + \int xuz\cdots dy + \text{etc.} = xyzu\cdots + C$$

et raisonnant comme précédemment, on le démontre facilement.

VII.

Tous les théorèmes précédents peuvent être généralisés, mais je me tiendrai à faire cela seulement pour le premier.

Théorème IV. Si nous avons l'équation $F(x, y) = 0$ entre les deux variables x et y, algébrique relativement à x, mais algébrique ou transcendante relativement à y, et telle qu'on ait

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + p_{m-1} x + p_m = 0, \tag{23}$$

$p_1, p_2, \cdots p_{n-1}, p_m$ étant des fonctions quelconques de y; et on représente par $\varphi(x)$ une valeur de y déduite de cette équation; posant

$$\int f'(x)\, \varphi(x)\, dx = \psi(x), \tag{24}$$

$f(x)$ étant une fonction algébrique et rationnelle de x et $f'(x)$ sa derivée; représentant par $x_1, x_2, \cdots x_m$ les m racines de l'équation (23), résolue par rapport à x et faisant, pour abréger,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots\cdots + f(x_m) = \tilde{\omega}(y), \tag{25}$$

[puisque le premier membre de cette égalité, fonction symmétrique des racines de (23), est une fonction de ses coefficients ou de y], on aura

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = y\tilde{\omega}(y) - \int \tilde{\omega}(y)\, dy + C, \tag{26}$$

C étant une constante arbitraire.

Démonstration. Prenons la formule connue

$$\int y\, dx + \int x\, dy = xy + C \tag{27}$$

et faisons-y $x = f(x)$; elle deviendra

$$\int f'(x)\, y\, dx + \int f(x)\, dy = y\ f(x) + C. \tag{28}$$

Supposons maintenant que les variables x et y qui entrent dans cette équation soient les mêmes que celles de l'équation (23), et mettons alors au lieu de y sa valeur $\varphi(x)$, dans la première intégrale; elle prendra la forme

$$\int f'(x)\, \varphi(x)\, dx = y f(x) - \int f(x)\, dy + C, \tag{29}$$

ou celle-ci

$$\psi(x) = y\, f(x) - \int f(x)\, dy + C. \tag{30}$$

Maintenant substituons au lieu de x toutes les racines $x_1\, x_2 \cdots x_m$ de l'équation (23), et sommons membre à membre les équations qui en résultent, on aura

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = y\tilde{\omega}(y) - \int \tilde{\omega}(y)\, dy + C, \tag{31}$$

eu égard à l'égalité (25); et le théorème se trouve démontré.

VIII.

Si $\tilde{\omega}(y)$ se réduit à une constante [ce qui aura lieu, entre autres cas, quand $f(x) = x^p$ et les $(q+1)$ premiers termes de l'équation (23) sont constants, p étant moindre que q] la formule (31) se réduit à

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_m) = C. \tag{32}$$

IX.

Théorème V. Représentons par $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ deux équations entre les trois variables x, y et z, algébriques relativement à x et y mais pouvantes être transcendantes ou non rélativement à z: représentons encore par

$$\left.\begin{aligned} x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + a_{m-1} x + a_m &= 0 \\ x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + b_{n-1} x + b_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

les développements de ces équations, $a_1, a_2, \cdots a_{m-1}, a_m$; $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}, b_n$ étant des fonctions de y et z; représentons encore par

$$\left.\begin{aligned} y^p + c_1 y^{p-1} + \cdots\cdots + c_{p-1} y + c_p &= 0 \\ y^q + d_1 y^{q-1} + \cdots\cdots + d_{q-1} y + d_q &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

les développements des mêmes équations suivant les puissances de y: représentons aussi par $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ les valeurs de y et z déduites du système (33), et par $\Phi(y)$, $\Phi_1(y)$ les valeurs de x et z données par le système (34); faisons

$$\int \varphi(x)\, \varphi_1(x)\, dx = \psi(x), \qquad \int \Phi(y)\, \Phi_1(y)\, dy = \chi(y); \tag{35}$$

et représentons par

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \quad x_2 \cdots\cdots x_m \\ &{}_1x \quad {}_2x \cdots\cdots {}_nx \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

les racines des équations (33), résolues par rapport à x; et par

$$\left.\begin{aligned} &y_1 \quad y_2 \cdots\cdots y_p \\ &{}_1y \quad {}_2y \cdots\cdots {}_qy \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

celles des équations (34); on aura: si $a_1 = b_1$, $c_1 = d_1$

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_m) &= C + \psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \cdots\cdots + \psi({}_nx) \\ \chi(y_1) + \chi(y_2) + \cdots\cdots + \chi(y_p) &= C_3 + \chi({}_1y) + \chi({}_2y) + \cdots\cdots + \chi({}_qy): \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

si a_1, b_1, c_1, d_1 sont des constants:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_m) &= C, \\ \psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \cdots\cdots + \psi({}_nx) &= C_1, \\ \chi(y_1) + \chi(y_2) + \cdots\cdots + \chi(y_p) &= C_2, \\ \chi({}_1y) + \chi({}_2y) + \cdots\cdots + \chi({}_qy) &= C_3, \end{aligned}\right\}; \tag{39}$$

mais si ces quantités, différentes entre elles, sont telles pourtant qu'on ait

$$a_1 = \frac{d \cdot \tilde{\omega}(yz)}{d \cdot (yz)} \qquad b_1 = \frac{d \cdot \tilde{\omega}_1(yz)}{d \cdot (yz)} \qquad c_1 = \frac{d \cdot \Pi(xz)}{d \cdot (xz)} \qquad d_1 = \frac{d \cdot \Pi_1(xz)}{d \cdot (xz)} \tag{40}$$

les produits yz, xz étant traités comme des variables indépendantes, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_m) &= -yz\,\frac{d \cdot \tilde{\omega}(yz)}{d \cdot (yz)} + \tilde{\omega}(yz) + C \\
\psi({}_1x) + \psi({}_2x) + \cdots\cdots + \psi({}_nx) &= -yz\,\frac{d \cdot \tilde{\omega}_1(yz)}{d \cdot (yz)} + \tilde{\omega}(yz) + C_1 \\
\chi(y_1) + \chi(y_2) + \cdots\cdots + \chi(y_p) &= -xz\,\frac{d \cdot \Pi(xz)}{d \cdot (xz)} + \Pi(xz) + C_2 \\
\chi({}_1y) + \chi({}_2y) + \cdots\cdots + \chi({}_qy) &= -xz\,\frac{d \cdot \Pi(xz)}{d \cdot (xz)} + \Pi(xz) + C_3
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Démonstration. La même que celle donnée pour les autres théorèmes.

X.

Si les équations proposées $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ sont algébriques relativement à toutes variables, on aura trois équations analogues à celles du système (38); et au lieu des 8 équations (39) et (41) il est clair qu'on en aura 12.

Mémoire

sur

Un théorème de Calcul intégral, et ses applications à la solution des problèmes de Physique mathématique.

I.

Cherchant la solution d'un problème dont l'équation différentielle ne pouvait pas être intégrée par les méthodes ordinaires, ou se présentait sous une forme peu convenable à la discussion des phénomènes physiques que j'avais en vue, j'ai fait pour la première fois la remarque, qu'il y a certaines questions dépendantes des équations aux différentielles partielles qui peuvent être parfaitement résolues, du moins dans ce qui se rapporte à la connaissance de quelques lois générales des phénomènes que l'on analyse, sans que l'on connaisse les intégrales, mais seulement la forme des fonctions arbitraires que ces intégrales doivent renfermer. Mon problème était compris dans ce cas, et la facilité que j'ai éprouvée en le traitant de cette manière, m'a porté tout naturellement, quand je voulais intégrer une équation différentielle partielle, à commencer par chercher premièrement la forme de ses fonctions arbitraires, et puis, en m'appuyant sur cette connaissance, à procéder à son intégration. De cette manière si l'intégrale ne se pouvait pas obtenir, on aurait du moins la forme de ses fonctions arbitraires; or cela équivaut dans beaucoup de problèmes, comme nous l'avons dit, à avoir l'intégrale elle-même.

Voici à ce sujet le théorème que j'ai trouvé.

Théorème I. Les fonctions arbitraires d'une équation différentielle partielle linéaire d'un ordre quelconque n et d'un nombre quelconque de variables, qui parmi les termes de l'ordre n renferme des coefficients différentiels par rapport à toutes les variables, ne dépendent que des termes où la fonction se trouve différentiée n fois, et aucunement de ceux qui renferment des coefficients différentiels des ordres inférieurs.

En outre, si l'on désigne par u la quantité qui doit entrer dans les fonctions arbitraires, la même théorie fait voir qu'on obtient l'équation qui détermine u, prenant les termes de l'ordre n de la proposée et les égalant à zéro, après avoir mis u à la place de la variable fonction et changé les indices de différentiation en puissances de du.

De cette manière non seulement les équations

$$R\frac{d^2z}{dx^2} + S\frac{d^2z}{dx\,dy} + T\frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Nz = 0, \qquad (1)$$

$$R\frac{d^2z}{dx^2} + S\frac{d^2z}{dx\,dy} + T\frac{d^2z}{dy^2} = 0, \qquad (2)$$

ont les mêmes fonctions arbitraires, mais, en désignant par u la quantité qui entre dans ces fonctions, on aura, pour la déterminer, l'équation

$$R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2} = 0. \tag{3}$$

II.

Disons encore quelques mots pour déterminer d'une manière plus précise la nature du théorème que nous venons d'énoncer.

Si l'équation (2), pour certaines valeurs de R, S et T, admet une intégrale de la forme

$$z = X\varphi(R, S, T) + Y\psi(R, S, T); \tag{4}$$

X et Y étant des fonctions de x et y, toute intégrale finie de l'équation (1), qui pourra s'écrire sans le signe de différentiation ou d'intégration, sera, en désignant par X_1, Y_1, deux fonctions de x et y, nécessairement de la forme

$$z = X_1\varphi(R, S, T) + Y_1\psi(R, S, T); \tag{5}$$

c'est-à-dire ne différera de l'intégrale (4) que par les quantités qui multiplient les fonctions arbitraires, et aucunement par ces fonctions mêmes. Mais si cette intégrale ne peut pas s'écrire sans la caractéristique d'intégration définie, on pourra toujours lui donner la forme

$$z = \int_a^b f(x,\theta)\,\varphi[RF_1(\theta), SF_2(\theta), TF_3(\theta)]\,d\theta + \int_{a_1}^{b_1} f_1(x,\theta)\,\psi[RF_4(\theta), SF_5(\theta), TF_6(\theta)]\,d\theta, \tag{6}$$

a, b, a_1, b_1 étant des constantes indépendantes des coefficients de la proposée et $F_1(\theta)$, $F_2(\theta)$, etc. des fonctions de θ telles que, lorsqu'on donne à cette variable ses valeurs limites, elles se réduisent toutes à l'unité, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait

$$\left.\begin{array}{llllll} F_1(a)=1, & F_2(a)=1, & F_3(a)=1, & F_4(a_1)=1, & F_5(a_1)=1, & F_6(a_1)=1, \\ F_1(b)=1, & F_2(b)=1, & F_3(b)=1, & F_4(b_1)=1, & F_5(b_1)=1, & F_6(b_1)=1. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Quelques fois la valeur de z pourra être donnée par une intégrale double, triple, etc. par une intégrale multiple. Mais toutes ces intégrales auront des limites constantes et indépendantes des coefficients de l'équation proposée, et les quantités R, S, T seront multipliées par des fonctions des variables indépendentes telles, qu'en y mettant les valeurs que ces variables acquièrent aux limites de l'intégration, elles se réduisent à l'unité.

Au lieu de supposer que les fonctions $F_1(\theta)$, $F_2(\theta)$, etc. se réduisent à l'unité quand on y met à la place de θ leurs valeurs limites, on pourra choisir ces fonctions de manière que les quantités

$$\varphi[RF_1(a), SF_2(a), TF_3(a)],\quad \varphi[RF_1(b), SF_2(b), TF_3(b)], \tag{8}$$

deviennent respectivement égales aux deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale (4) de l'équation (2). La même considération doit alors nous guider dans le choix des fonctions $F_4(\theta)$, $F_5(\theta)$ et $F_6(\theta)$.

Ainsi supposant que l'intégrale de l'équation (2) soit

$$z = X\varphi[{}^1f(x,y) + {}^2f(x,y)] + Y\psi[{}^1f(x,y) - {}^2f(x,y)], \tag{9}$$

${}^1f(x,y)$, ${}^2f(x,y)$ étant deux fonctions de x et y qui ne dépendent que de R, S et T, on pourra donner à l'intégrale de l'équation (1) la forme

$$z = \int_0^{\pi} f(x,y,\theta)\,\varphi[{}^1f(x,y) + {}^2f(x,y)\cos\theta]\,d\theta + \int_0^{\pi} f_1(x,y,\theta)\,\psi[{}^1f(x,y) + {}^2f(x,y)\cos\theta]\,d\theta. \tag{10}$$

Pour faire encore mieux voir ce que nous venons de dire, prenons quelques exemples en donnant des formes particulières à l'équation générale (1).

Soit premièrement l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2}. \tag{11}$$

Comme son intégrale est

$$z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax), \tag{12}$$

toute intégrale de l'équation plus générale

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Nz \tag{13}$$

qu'on pourra obtenir sous forme finie, indépendemment des signes de différentiation et intégration, sera nécessairement de la forme

$$z = X\varphi(y+ax) + Y\psi(y-ax). \tag{14}$$

Telle est l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{2a^2}{y}\frac{dz}{dy}, \tag{15}$$

qui a pour intégrale

$$z = \frac{1}{y}\varphi(y+ax) + \frac{1}{y}\psi(y-ax). \tag{16}$$

Si l'équation doit contenir des signes de différentiation dans son intégrale elle ne peut être que de la forme

$$\begin{aligned} z = {} & X\varphi(y+ax) + X_1\frac{d\cdot\varphi(y+ax)}{dx} + X_2\frac{d^2\cdot\varphi(y+ax)}{dx^2} + \text{etc.} \\ & + Y\psi(y-ax) + Y_1\frac{d\cdot\psi(y-ax)}{dy} + Y_2\frac{d^2\cdot\psi(y-ax)}{dy^2} + \text{etc.} \end{aligned} \tag{17}$$

C'est ainsi que l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx} \tag{18}$$

a pour intégrale

$$z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax) - x[\varphi'(y+ax) - \psi'(y-ax)]. \tag{19}$$

L'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{4a}{y+ax}\frac{dz}{dx} \tag{20}$$

dont l'intégrale ne peut pas être écrite sans le signe $\int$, a pour fonction primitive

$$z = e^{-\frac{2ax}{y+ax}}\left[\int e^{\frac{2ax}{y+ax}}\frac{a\,dx}{y+ax}\varphi(y-ax) + \psi(y+ax)\right]; \tag{21}$$

et celle-ci

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2} + bz, \tag{22}$$

qui exige la caractéristique d'intégration définie, donne pour z l'expression

$$\begin{aligned} z &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sqrt{b}\,x\sin u\sin v}\varphi(y+ax\cos u)\,x\sin u\,du\,dv \\ &\frac{d\cdot}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sqrt{b}\,x\sin u\sin v}\psi(y+ax\cos u)\,x\sin u\,du\,dv. \end{aligned} \tag{23}$$

(V. Poisson, Mémoires de l'Institut, t. III, p. 164.)

De même, si nous prenons les équations à quatre variables indépendantes

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{24}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{z}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{\beta}{z^2}\varphi, \tag{25}$$

composées de la même manière relativement aux termes du second ordre, ses intégrales doivent contenir les mêmes fonctions arbitraires, du moins d'après le sens que nous avons donné à cette expression.

En effet, ces équations ont pour intégrales

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x+at\cos u, y+at\sin u\sin v, z+at\sin u\cos v)\,t\sin u\,du\,dv \\ &+ \frac{d\cdot}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+at\cos u, y+at\sin u\sin v, z+at\sin u\cos v)\,t\sin u\,du\,dv, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} z^{\delta}\,t\,\Phi(x+at\cos u, y+at\sin u\sin v, z\cos\omega+at\sin u\cos v)\sin^{2h-1}\omega\sin u\,d\omega\,du\,dv \\ &+ \frac{d\cdot}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} z^{\delta}\,t\,\psi(x+at\cos u, y+at\sin u\sin v, z\cos\omega+at\sin u\cos v)\sin^{2h-1}\omega\sin u\,d\omega\,du\,dv. \end{aligned} \tag{27}$$

La première de ces équations a été donnée par Poisson dans le tome III des *Nouveaux Mémoires de l'Institut*. Quant à la seconde on verra plus bas comme on peut obtenir sa valeur.

Dans cette dernière équation δ est une racine de l'équation

$$\delta(\delta-1) + \frac{\alpha}{a^2}\delta + \frac{\beta}{a^2} = 0, \tag{28}$$

et h est donné par l'égalité

$$2h = 2\delta + \frac{\alpha}{a^2}. \tag{29}$$

Les exemples précédents, tout en faisant voir le sens que nous donnons à notre théorème, servent au même pour le confirmer. Prenant en effet toutes les intégrales des équations différentielles par-

tielles que l'on trouve dans les Recueils scientifiques, on verra que toutes ont la forme que nous venons de leur prescrire, ou du moins qu'on peut toujours les reduire à cette forme là. Il y en a pourtant quelques unes qui semblent se réfuser à cette transformation, mais cette différence n'est qu'apparente, ainsi qu'on le fera voir plus bas.

III.

Le théorème précédent sur la composition des fonctions arbitraires, quoique jamais énoncé explicitement, semble pourtant avoir été connu dans quelques cas particuliers. C'est ainsi qu'EULER, observant que les équations

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} = M, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} + Q\frac{dz}{dy} = M \tag{30}$$

avaient des fonctions arbitraires composées d'une seule variable, tâcha de mettre l'équation générale du second ordre (1) sous la forme

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Nz = 0, \tag{31}$$

croyant, par induction, que ses fonctions arbitraires ne devraient être composées que d'une seule variable chaqu'une. Lui et LAPLACE ont, en effet, prouvé que les fonctions arbitraires de cette équation ne dépendent que d'une seule variable, toutes les fois que son intégrale peut être écrite sans le signe de différentiation ou d'intégration définie ou indéfinie, ou dans les cas où cette intégrale ne renferme qu'un nombre limité de signes de différentiation et d'intégration indéfinie. Des calculs d'EULER on peut même déduire que, étant donnée une équation différentielle partielle linéaire quelconque, ses fonctions arbitraires ne dépendent que des termes de l'ordre n, si n est le nombre qui marque l'ordre de l'équation. Cependant ni lui ni LAPLACE n'ont étendu cette remarque au cas général où l'équation ne peut pas s'obtenir sous forme finie; or c'est précisément dans ce cas que le théorème est important, parcequ'il y a des questions, comme on le verra dans les applications que nous allons faire de ce théorème, où quelques termes des équations différentielles doivent rester indéterminés, et, par conséquent, où il n'est pas possible d'admettre que son intégrale puisse s'obtenir en termes finis sans le signe d'intégration définie. Notre théorème n'exigeant que la détermination des termes qui renferment les coefficients différentiels de l'ordre supérieur, s'applique exactement au genre de questions auxquelles je me rapporte, car ce sont seulement les termes des ordres inférieurs qui ne sont pas donnés.

Quoique j'aie dit que notre théorème était connu d'EULER et de LAPLACE dans un cas particulier, cependant quand on lit avec attention ce qu'ils ont écrit et on est acoutumé à réflechir sur la marche lente par laquelle passe une vérité depuis le moment où elle est entrevue jusqu'à celui où elle arrive à son complet développement, on conviendra, ce me semble, que ce théorème n'était pas connu de ces géomètres même dans ce cas particulier, quoique on puisse facilement le déduire de leurs calculs. En effet, LAPLACE ne se sert de la remarque, qu'il avait faite, de ce que les fonctions arbitraires de l'équation (31) dépendent seulement de x ou de y, que pour donner une forme plus simple à l'intégrale de cette équation, et quoique de ses calculs résulte un cas particulier de notre théorème, cependant il ne l'énonce nulle part dans le beau Mémoire qui en 1773 a été lu devant l'Académie des Sciences de l'Institut de France et qui a pour titre *Recherches sur le Calcul intégral aux différences partielles.*

Euler aussi n'avait pas d'autre but que d'obtenir des expressions où les fonctions arbitraires de la proposée ne fussent pas développées afin que son intégrale eût une forme finie. Il n'a jamais énoncé aucun théorème sur la composition des fonctions arbitraires, et cependant ce théorème, pour lui surtout qui ramassait tout ce qu'il rencontrait sur son chemin, était au moins curieux.

Dans le chapitre IX du second volume du grand Traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix, on trouve tout ce que l'on a dit de plus positif sur la matière, et pourtant rien de bien explicite encore.

Un homme de génie émet une idée, une proposition quelconque: bien du temps, des siècles quelques fois, sont nécessaires pour que l'on en déduise les principales conséquences; mais ces conséquences, une fois tirées, semblent en découler d'une manière si simple et si naturelle que tous ceux qui viennent après et voient la théorie toute formée, la croient due en entier au premier inventeur, à celui qui l'avait premièrement esquissée, mais qui était bien loin d'avoir vu toutes les conséquences qui lui sont après attribués.

L'histoire de presque toutes les sciences peut prouver cela d'une manière exubérante.

Si j'ouvre l'Histoire de l'Economie Politique de M. Blanqui je rencontre les lignes suivantes, tirées des écrits d'Aristottes: «Tout objet de propriété, dit-il, a deux usages, tous deux inhérents à l'ob-«jet, avec une destination particulière. L'un est l'usage naturel, l'autre est l'usage artificiel. Ainsi «l'usage naturel d'une chaussure est de servir à marcher, son usage industriel est d'être un objet «d'échange.» Plus bas on lit encore les lignes suivantes tirées du même ouvrage. «On convient, «ajoute-t-il, de donner et de recevoir dans les transactions une matière utile et d'une circulation aisée. «On adopta pour cet usage le fer, l'argent et d'autres métaux. Ce premier signe d'échange ne valut «d'abord qu'à raison du volume et du poids: en suite on le frappa d'un signe qui en marquait la «valeur, afin d'être dispensé de toute autre vérification. Après l'adoption nécessaire de la monnaie «pour les échanges il se fit une révolution dans la manière de spéculer: le trafic parut. Peut-être «fut-il peu compliqué à l'origine; bientôt il se fit des combinaisons plus habiles, afin de tirer des «échanges le plus grand bénéfice possible. Il est arrivé de là qu'on s'est accoutumé à restreindre l'art «de spéculation à la seule monnaie; on a pensé que l'unique fonction du spéculateur était d'amasser «des métaux précieux, parceque le résultat définitif de ses opérations est de procurer de l'or et des «richesses. Cependant la monnaie ne serait-elle pas un bien imaginaire? La valeur est toute dans la «loi. Où est celle qu'elle a de la nature? Si l'opinion qui l'admet dans la circulation vient à changer «où est son prix réel? quel besoin de la vie pourrait elle soulager? A côté d'un morceau d'or, on «manquerait des plus indispensables aliments. Quelle folie d'appeler richesse une abondance au sein de «laquelle on meurt de faim!» (Voyez: Histoire de l'Economie Politique de M. Blanqui, t. I, p. 49.)

On voit par ces lignes ainsi que par d'autres tirées des écrits de Platon, Aristottes et Xénophon, et qui se trouvent dans l'ouvrage de M. Blanqui, que les Grecs se formaient déjà une idée très claire de la valeur d'utilité, de la valeur d'échange, de monnaie et de l'importance de la division du travail, c'est-à-dire des principes sur lesquels se fonde toute l'Economie politique; cependant deux mille ans doivent encore s'écouler avant qu'Adam Smith, dans ses fameuses *Recherches sur la nature et la cause de la richesse des Nations,* vienne tirer les principales conséquences des principes qui avait été posés si nettement. Pendant ces deux mille ans des hommes tels que Quesnay, Mercier de la Rivière, Jean Jacques Rousseau, Condorcet, Turgot, Voltaire, Montesquieu etc. s'étaient plus ou moins occupés de ce sujet. On connait pourtant le mot de J. B. Say sur Montesquieu: «Ce serait bien mieux s'il n'avait pas écrit sur le commerce!»

J'ouvre *l'Esprit des Lois* et je lis les mots suivants «Les filles que l'on ne conduit que par le «mariage aux plaisirs et à la liberté; qui ont un esprit qui n'ose penser, un coeur qui n'ose sentir, des

«yeux qui n'osent voir, des oreilles qui n'osent entendre; qui ne se présentent que pour se montrer «stupides; condamnées sans relâche à des bagatelles et à des préceptes sont assez portées au mariage; «ce sont les garçons qu'il faut encourager.» (Livr. XXIII, chap. IX.)

MONTESQUIEU termine ici le chapitre et commence le suivant par ces mots: «Partout où il se «trouve une place où deux personnes peuvent vivre commodément, il se fait un mariage. La nature «y porte assez lorsqu'elle n'est point arrêtée par la difficulté de la subsistance.»

Il est impossible de dire des choses plus contradictoires. Si c'est seulement la difficulté de la subsistance qui met obstacle au mariage, comment a-t-on besoin d'encouragement pour porter les hommes au mariage?

Ainsi MONTESQUIEU, c'est-à-dire un des plus beaux génies qui aient jamais honoré l'humanité, pose un principe très-juste et très-exact, et dans le même ouvrage, qu'il avait pourtant rédigé avec un soin tout particulier et pour la forme et pour le fond*, et dans la même page, il en tire des conséquences tout-à-fait fausses!

On ne peut pas citer deux exemples plus frappants pour montrer la lenteur avec laquelle l'idée la plus simple marche depuis le moment où elle a été émise jusqu'à celui où elle devient tout-à-fait comprise dans son ensemble.

Voulez-vous encore un troisième exemple?

Je prends l'Essai sur la Métamorphose des Plantes de GÖTHE. On connait la grande influence que ce petit livre a exercé sur l'Histoire naturelle. Cependant quand nous le lisons avec attention et voyons GÖTHE avec ses belles phrases poétiques de métamorphose ascendante et de métamorphose descendante, nous expliquer comment la pétale tour à tour s'enroule en étamine ou prend la nature foliacée du calice, on ne doit pas croire, certes, qu'une telle transformation soit réelle, puisque en général un organe une fois formé ne change plus de nature, mais simplement que les matériaux, qui, dans quelques circonstances forment le calice, dans d'autres, se transforment en corolle, étamines ou pistil; et, *vice-versa,* qu'au lieu de former des carpelles ils revêtent la forme d'étamines, corolle ou calice.

Réduite à cela, c'est-à-dire, à ce qu'elle est, la théorie de GÖTHE semble n'offrir rien de nouveau, car tout le monde sait depuis long temps que c'est un même fluide, la sève, qui fournit des matériaux pour la formation des différentes parties dont la plante se compose. Cependant tous les naturalistes distincts regardent la *Métamorphose des plantes* comme un chef-d'oeuvre, et certes je n'en ai pas une opinion différente, les considérations précédentes n'ayant été faites que pour montrer comme il est difficile de tirer de l'idée la plus simple les conséquences qui semblent en découler immédiatement! **

* Voyez sa correspondance avec l'abbé de GUASCO, où il se plaint amèrement de ce qu'on s'est permis, dans une édition que l'on faisait de son ouvrage à Genève, de changer un mot de son manuscrit.

** Avant GÖTHE même la théorie qu'on lui attribue avait été présentée dans son entier, quoique pas comprise, par WOLF. Les mots suivants, cités par GÖTHE lui même, résument en effet presque toute la Métamorphose des Plantes. «*Dass aber auch die Blumenkrone und die Staubgefässe weiter nichts als modificirte Blätter sind, wird aus einzelnen Beobachtungen wenigstens sehr wahrscheinlich. Man sieht nämlich nicht selten die Blätter des Kelches in Blumenblätter, und umgekehrt diese in Kelchblätter, aber nichts als Kelchblätter übergehen. Wenn nun die Kelchblätter wahre Blätter, die Blumenblätter aber nichts als Kelchblätter sind, so ist es wohl keinem Zweifel unterworfen, dass auch die Blumenblätter modificirte wahre Blätter sind. Auf ähnliche Weise sieht man auch in den Linné'schen Polyandrien die Staubfäden häufig sich in Blumenblätter verwandeln, und dadurch gefüllte Blumen bilden; umgekehrt aber Blumenblätter in Staubfäden übergehen, woraus sich wieder ergiebt, dass auch die Staubgefässe ihrem Wesen nach eigentlich Blätter sind. Mit einem Worte, in der ganzen Pflanze, deren Theile auf den ersten Anblick so ausserordentlich von einander abweichen, sieht man, wenn man alles reiflich erwägt, nichts als Blätter und Stängel, indem die Wurzel zu diesen gehört. Diese sind die nächsten unmittelbaren und zusammengesetzten Theile derselben; die entfernten und einfachen, woraus diese wieder gebildet werden, sind Gefässe und Bläschen.*» (*Göthe's sämmtliche Werke, Bd. XXVII, p. 79.*)

Je terminerai ces réflexions en citant quelques mots tirés du grand Traité de Calcul différentiel et intégral de LACROIX (t. III, p. 604), qui viennent si à propos qu'on les dirait écrits exprès pour moi. «C'était d'abord bien peu de chose en apparence, que cette différence de notation des différentielles et «cette abréviation du calcul, mais les conséquences ont prouvé que c'était beaucoup; car on n'y serait «point arrivé en laissant aux accroissemens les dénominations indépendantes que leur appliquait BARROW. «En se fondant sur de pareilles analogies, on a voulu, de nos jours, faire remonter jusqu'à FERMAT, «l'origine du Calcul différentiel. Sans doute que FERMAT, par le mécanisme du Calcul qu'il emploie «pour la détermination des maximums et des minimums (sans en donner d'ailleurs aucun principe) et «que BARROW, par la considération du triangle formé par les accroissemens de l'ordonné et de l'abcisse, «touchèrent de bien près au Calcul différentiel; mais quoiqu'on soit frappé aujourd'hui de la ressem- «blance de ces diverses méthodes, il ne faut pas croire que les contemporains jugeassent comme nous «de cette ressemblance. Nous lisons dans leurs formules ce qu'ils ne voyaient pas eux mêmes, parce «que nous les rapportons à un ensemble qui nous est familier, et dont ils n'avaient aucune idée. Tant «que les notions conservent l'espèce d'étrangeté qui les accompagne presque toujours quand elles se «présentent pour la première fois, elles tiennent pour ainsi dire trop de place dans notre esprit, pour- «qu'il puisse apercevoir d'abord leurs conséquences, ou leur associer des notions accessoires; c'est ainsi «que de simples rapprochemens, des légères modifications, qui nous paraissent aujourd'hui implicite- «ment comprises dans les ouvrages de nos dévanciers leur ont entièrement échappé. On en voit un «exemple frappant dans la combinaison faite par CHARPIT, de deux méthodes trouvées par LAGRANGE. «Aussi la stricte justice demande qu'on n'attribue les inventions, surtout lorsqu'il s'agit de théories «naissantes, qu'à celui qui les a complètement énoncées.»

Du reste, si LAPLACE et EULER ont connu notre théorème dans un cas particulier, ils ne l'ont certes pas connu dans le cas général, où les équations différentielles ne peuvent pas être intégrées. Or, c'est dans ce cas, ainsi qu'on l'a remarqué, que le théorème est vraiment digne d'attention. D'ailleurs ni ces deux géomètres ni personne n'a connu les conséquences importantes que l'on tire de ce théorème, et que nous allons indiquer dans ce Mémoire et dans un autre, sur la théorie du son, qui suivra immédiatement celui-ci.

IV.

Allons maintenant à la démonstration du théorème.

Soit premièrement l'équation du premier ordre

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = 0, \tag{32}$$

où X, Y sont des fonctions quelconques de x et y. Mettons cette équation sous la forme

$$Xp + Yq = 0, \tag{33}$$

et joignons-y

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{34}$$

Eliminant q entre ces deux équations, l'intégrale de la proposée, dépend, comme on sait, de l'intégration du système d'équations

$$dz = 0, \qquad Y\,dx - X\,dy = 0. \tag{35}$$

Comme

$$Y\,dx - X\,dy \tag{36}$$

est une fonction à deux variables, on peut toujours la rendre différentielle exacte en la multipliant par un facteur convenable μ, fonction de x et y. On aura donc

$$\mu\,(Y\,dx - X\,dy) = d\cdot f(x,y), \tag{37}$$

d'où

$$f(x,y) = c: \tag{38}$$

la première des équastions (35) ayant pour intégrale $z = c'$, on aura, en désignant par φ une caractéritique de fonction arbitraire

$$z = \varphi\,[f(x,y)]; \tag{39}$$

pour l'intégrale de la proposée.

Si l'on prend maintenant l'équation

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Zz, \tag{40}$$

on trouve que son intégrale dépend de celles du système

$$Y\,dx - X\,dy = 0, \qquad Y\,dz - Z\,z\,dy = 0. \tag{41}$$

La première de ces équations donnant, comme plus haut, $f(x,y) = c$, on pourra éliminer x de la seconde, et comme je suppose que l'équation (40) soit linéaire, le quotient de Z par Y deviendra une simple fonction de y et c. Faisant donc

$$\int\frac{Z}{Y}\,dy = f_1(y,c), \tag{42}$$

la seconde des équations (41) donnera

$$\log z - f_1(y,c) = c', \tag{43}$$

ou

$$z\,e^{-f_1(y,c)} = c', \tag{44}$$

en changeant la forme de la constante arbitraire.

On aura après pour l'intégrale de la proposée

$$z = e^{f_1[y,f(x,y)]}\,\varphi\,[f(x,y)], \tag{45}$$

φ étant une caractéristique de fonction arbitraire.

Si l'on rapproche maintenant les deux équations (32) et (40), l'une de l'autre, ainsi que leurs intégrales, on remarquera que ces deux équations, qui ne diffèrent pas par les termes renfermant les coefficients différentiels du premier ordre, ont, dans leurs intégrales, la même fonction arbitraire. En outre, on voit que la quantité qui entre dans cette fonction satisfait à l'équation

$$X\frac{d\cdot f(x,y)}{dx} + Y\frac{d\cdot f(x,y)}{dy} = 0, \tag{46}$$

que l'on forme en prenant les termes de la proposée qui renferment les coefficients différentiels et en y mettant à la place de la fonction z celle qui doit entrer dans la fonction arbitraire.

Executant la différentiation indiquée au second membre de l'équation (37), et faisant attention à ce que, d'après cette équation, on a

$$\frac{d\cdot f(x,y)}{dx} = Y\mu, \qquad \frac{d\cdot f(x,y)}{dy} = -\mu X, \tag{47}$$

on reconnaîtra tout de suite l'identité de l'équation ci-dessus. Ainsi notre théorème se trouve démontré pour ce qui concerne les équations du premier ordre. Faisons voir maintenant que la même chose a lieu pour celles qui sont du second ordre.

Pour cela, mettons l'équation générale (1) sous la forme

$$Rr + Ss + Tt = V: \tag{48}$$

R, S, T sont donc des fonctions quelconques de x et y; V une fonction quelconque des mêmes variables et de z, p et q, linéaires relativement à ces dernières quantités.

La méthode de MONGE fait dépendre, comme on sait, l'intégrale de cette équation, de l'intégration du système des équations

$$\left.\begin{aligned} R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dy\,dx &= 0, \\ R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

à quoi l'on peut ajouter

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{50}$$

Si l'on fait $\frac{dy}{dx} = m$, les équations (49) seront remplacées par les deux systèmes des équations

$$\left.\begin{aligned} dy - m'\,dx &= 0, \\ R\,m'\,dp + T\,dq - V\,m'\,dx &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} dy - m''\,dw &= 0, \\ R\,m''\,dp + T\,dq - V\,m''\,dx &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

m' et m'' étant les deux racines de l'équation algébrique

$$Rm^2 - Sm + T = 0, \tag{53}$$

à quoi il faut toujours ajouter l'équation (50). Ces deux systèmes étant semblables il suffit de nous occuper d'un seul: ce que nous ferons pour le premier sera de suite applicable à l'autre. Occupons-nous donc du premier.

R, S et T étant des fonctions de x et y seulement, il sera toujours possible de trouver un facteur μ capable de rendre la fonction

$$dy - m'\,dx \tag{54}$$

une différentielle exacte. On pourra donc toujours tirer de la première équation (51) une intégrale de la forme

$$f(x, y) = c. \tag{55}$$

Cette équation permet de regarder y comme fonction de x dans l'intégration de la seconde équation (51). Supposons-la résolue par rapport à y et désignons par

$$y = f_1(x, c) \tag{55}$$

la valeur qu'on en déduit. On pourra aussi en vertu de la même équation, regarder q comme fonction de p, et on aura

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = q\,f'_1(x, c). \tag{56}$$

Au moyen de ces deux équations et de leurs différentielles, on pourra chasser y, dy, q et dq de la seconde équation (51) et de l'équation (50), et éliminant après p entre ces équations, on arrivera à une équation ne contenant que les variables x et z laquelle sera toujours intégrable à l'aide d'un certain facteur μ et conduira, en conséquence, à une équation que l'on pourra mettre sous la forme

$$_1f(x, z, c) = c', \tag{57}$$

c' étant une constante arbitraire. Mettant maintenant dans cette équation au lieu de c sa valeur en x et y et en désignant par φ une caractéristique de fonction arbitraire, on aura

$$ {}_1f[x, z, f(x, y)] = \varphi[f(x, y)] \tag{58}$$

pour l'intégrale de l'équation (48). Le système des équations (52) conduit à une autre intégrale de la même équation. On aura donc

$$\left.\begin{aligned} {}_1f[x, z, f_1(x, y)] &= \varphi[f_1(x, y)], \\ {}_2f[x, z, f_2(x, y)] &= \psi[f_2(x, y)], \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

pour les deux intégrales à fonctions arbitraires que l'équation du second ordre (48) comporte. Dans ces équations $f_1(x, y)$ désigne la fonction que nous avions précédemment désignée par $f(x, y)$: f_2 et ${}_2f$ sont deux fonctions qui se déduisent de f_1 et ${}_1f$ en y mettant m'' à la place de m'.

Maintenant si nous prenons, au lieu de l'équation (48), une autre équation linéaire et du second ordre

$$Rr + Ss + Tt = V' \tag{60}$$

composée de la même manière que cette équation relativement aux termes du second ordre, mais différente pour ce qui concerne les autres, on voit facilement que ses deux intégrales pourront se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} {}_1f_1[x, z, f_1(x, y)] &= \varphi[f_1(x, y)], \\ {}_2f_1[x, z, f_2(x, y)] &= \psi[f_2(x, y)], \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

${}_1f_1$ et ${}_2f_1$ étant les caractéristiques de deux fonctions dépendentes de la nature des fonctions R, S, T et V'; $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ étant les mêmes fonctions qui entrent dans les équations (59). On voit cela faisant attention à ce que les fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, étant les intégrales des fonctions

$$dy - m'\,dx, \qquad dy - m''\,dx \tag{62}$$

(rendues différentielles exactes à l'aide des facteurs μ' et μ''), ne changent pas de valeur quand on passe de l'équation (48) à l'équation (60), car m' et m'', d'après l'équation (53), ne sont que des fonctions des quantités R, S et T, égales dans les deux équations.

On peut donc dire que les fonctions arbitraires des équations différentielles partielles linéaires du second ordre ne dépendent que des termes renfermant les coefficients différentiels du même ordre, et, aucunement de ceux des ordres inférieurs: ou, en d'autres termes, les équations différentielles partielles linéaires du second ordre qui ne diffèrent pas les unes des autres par les termes renfermant des coefficients différentiels du même ordre, ont les mêmes fonctions arbitraires.

A cela on peut ajouter, qu'en désignant par u une quelconque des deux fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ qui entre dans les fonctions arbitraires, elle satisfait à l'équation

$$R\frac{du^2}{dx} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2} = 0, \tag{63}$$

que l'on forme en prenant les termes du second ordre de l'équation proposée, en y mettant u à la place de z et en changeant l'indice de différentiation en indice d'élévation de puissance.

En effet, de l'équation

$$\mu'(dy - m'\,dx) = d \cdot f_1(x, y) = \frac{d \cdot f_1(x, y)}{dx}\,dx + \frac{d \cdot f_1(x, y)}{dy}\,dy \tag{64}$$

on tire

$$\frac{d \cdot f_1(x, y)}{dx} = -m'\mu' \qquad \frac{d \cdot f_1(x, y)}{dy} = \mu'; \tag{65}$$

ces valeurs transforment l'équation (63) en

$$\mu(Rm'^2 - Sm' + T) = 0, \tag{66}$$

c'est-à-dire en une équation identique d'après l'équation (53). On prouvera de même que la fonction $f_2(x,y)$ mise à la place de u dans l'équation (63) satisfait à cette équation.

Notre théorème se trouve donc démontré pour les équations du second ordre. Quelques mots de plus suffiront pour montrer qu'il a lieu pour un ordre quelconque.

Si l'on a, en effet, l'équation générale de l'ordre n

$$P\frac{d^n z}{dx^n} + P_1\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + \cdots\cdots + P_{n-1}\frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} + P_n\frac{d^n z}{dy^n} = V; \qquad (67)$$

son intégrale dépend, d'après la méthode de Monge, de l'intégration d'un système d'équations linéaires dont une est

$$dy - m\,dx = 0, \qquad (68)$$

m étant une racine quelconque de l'équation algébrique

$$Pm^n - P_1 m^{n-1} + \cdots\cdots \mp P_{n-1}m \pm P_n = 0. \qquad (69)$$

En y mettant à la place de m les n racines de l'équation précédente, on aura n équations, à deux variables, toujours intégrables à l'aide de facteurs convenablement choisis, qui donnent les fonctions arbitraires de l'équation (67) et comme ces fonctions ne dépendent pas de V, mais simplement de P, $P_1, \cdots P_{n-1}$, P_n, il s'en suit que les fonctions arbitraires d'une équation linéaire de l'ordre n ne dépendent que de ceux de ses termes qui renferment des coefficients différentiels du même ordre.

L'autre partie de notre théorème, savoir, que chacune des fonctions arbitraires u de l'équation (67) doit satisfaire à l'équation

$$P\frac{du^n}{dx^n} + P_1\frac{du^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{du}{dy} + \cdots\cdots + P_{n-1}\frac{du}{dx}\frac{du^{n-1}}{dy^{n-1}} + P_n\frac{du^n}{dy^n} = 0, \qquad (70)$$

découle aussi immédiatement de l'équation (69) combinée avec l'égalité (68) ou plutôt celle-ci

$$\mu(dy - m\,dx) = d\cdot u = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy. \qquad (71)$$

V.

Le théorème sur la composition des fonctions arbitraires se trouve donc complètement démontré pour les équations à trois variables.

Voyons maintenant comme on peut l'étendre à d'autres équations. Soit l'équation

$$A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^2u}{dy^2} + C\frac{d^2u}{dz^2} + D\frac{d^2u}{dx\,dy} + E\frac{d^2u}{dx\,dz} + F\frac{d^2u}{dy\,dz} = V. \qquad (72)$$

En lui appliquant la méthode de Monge, l'intégrale de cette équation dépend de l'intégration du système des équations

$$\left.\begin{aligned} dx - h\,dz &= 0,\\ dy - k\,dz &= 0,\\ Ahk\,dz + Bk\,dp + Ch\,dq - Vhk\,dz &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

h et k étant donnés par les équations

$$\left.\begin{aligned} Ah^2 - Dh + B &= 0, \\ Ak^2 - Ek + C &= 0, \\ Bk^2 - Fhk + Ch^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

L'équation (72) étant linéaire, et, par conséquent, A, B, C, D, E et F des fonctions seulement de x, y et z, les quantités h et k seront aussi fonctions seulement des mêmes variables. Si l'on élimine donc tour à tour, entre les deux premières équations (73), la variable z et la variable y, on arrivera à deux équations, l'une entre x et y, l'autre entre x et z, lesquelles, intégrées au moyen d'un facteur convenable, donnent les fonctions arbitraires de l'équation (72), et font voir tout à la fois qu'elles ne dépendent que de ses termes du second ordre. Ce que nous venons de faire pour l'équation (72) à quatre variables peut s'appliquer mot à mot à une équation quelconque de l'ordre n et d'un nombre quelconque de variables.

VI.

Notre théorème se trouverait donc démontré dans toute sa généralité, s'il ne s'y trouvait pas, quand il s'agit d'équations à plus que trois variables, une difficulté qu'il faut signaler.

Les équations (74) qui donnent h et k étant en nombre trois, tandis qu'il n'y a que deux indéterminées, il faut nécessairement qu'il y ait une équation de condition entre les quantités A, B, C, D, E et F: en effet, éliminant h et k entre ces trois équations on trouve

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = 4ABC + DEF. \qquad (75)$$

Maintenant quand cette équation entre les coefficients de la proposée n'aura pas lieu, notre théorème continuera encore à subsister? Dépendent encore les fonctions arbitraires de l'équation (72) seulement de ses termes du second ordre?

Quand l'équation ci-dessus n'aura plus lieu, la méthode de Monge ne pourra plus être employée; notre démonstration tombera alors en défaut, mais il ne faut pas croire pour cela qu'elle n'aura plus lieu, et qu'elle ne subsistera que tant que le théorème de Monge aura lieu ou tant que l'équation (75) sera identique. Nous pourrons en effet, en prenant des exemples particuliers, voir tout de suite qu'il y a des équations qui ne satisfont pas à la condition exprimée par l'équation (75), et dont pourtant les fonctions arbitraires ne dépendent que des termes du second ordre. Si, par exemple, dans l'équation (25), l'on fait $x = 0$, on aura une équation à quatre variables, dont les coefficients ne satisfont pas à la condition ci-dessus; cependant son intégrale, que l'on peut déduire de la formule (27), fait voir que ses fonctions arbitraires ne dépendent que des coefficients des termes du second ordre et aucunement de α et β, coefficients de ceux des ordres inférieures.

Notre théorème ne subsistera donc pas seulement dans les cas où l'on pourra faire usage de la méthode de Monge. Voici comme on peut démontrer qu'il subsiste dans tous les cas. Quand il s'agit d'équations à trois variables il a été complètement démontré quelque soit l'ordre de l'équation. Il ne s'agit donc que de l'étendre aux équations à un plus grand nombre de variables.

Démontrons-le premièrement pour les équations à quatre variables: cela fait, il sera très-facile d'étendre notre démonstration à des équations à un nombre quelconque de variables. Prenons donc l'équation (72) et admettons que ses fonctions arbitraires dépendent non seulement des coefficients

A, B, C, D, E, F des termes du second ordre, mais encore de ceux des ordres inférieurs. Désignons une de ses fonctions arbitraires par

$$\varphi[f(x,y,z) + f_1(x,y,z)], \tag{76}$$

$f(x,y,z)$ étant une fonction de x, y et z, dépendante des coefficients des termes du second ordre seulement et $f_1(x,y,z)$ une fonction qui dépendra de ces coefficients, de ceux du premier ordre et de celui qui multipliera z, ou, autrement, une fonction de A, B, C, D, E, F et V.

Cela posé, supposons maintenant que la variable z qui entre dans la fonction u devienne une constante c; l'équation (72) se réduira à

$$A_1 \frac{d^2u}{dx^2} + B_1 \frac{d^2u}{dy^2} + D_1 \frac{d^2u}{dx\,dy} = V_1, \tag{77}$$

en désignant par A_1, B_1, D_1, V_1, ce que deviennent les fonctions A, B, D, V_1 quand on y fait $z = c$; et une de ses intégrales qui, d'après la forme que nous avons donnée ci-dessus à la fonction arbitraire, pourrait être mise sous la forme

$${}_1f[u,z,y,x] = \varphi[f(x,y,z) + f_1(x,y,z)], \tag{78}$$

deviendrait dans le cas actuel

$${}_1f(u,x,y,c) = \varphi[f(x,y,c) + f_1(x,y,c)]; \tag{79}$$

mais l'équation (77) étant à deux variables et ses fonctions arbitraires par conséquent ne dépendant que des coefficients des termes du second ordre, il faut nécessairement que son intégrale soit de la forme

$${}_1f(u,x,y,c) = \varphi[f(x,y,c)]; \tag{80}$$

et que l'on ait en conséquence

$$f_1(x,y,c) = 0. \tag{81}$$

Or cette équation devant avoir lieu quelque soit la constante c est absurde et ne peut pas subsister, car il est impossible qu'il y ait une fonction de x, y et z qui pour $z = c$, c étant une constante quelconque, puisse se réduire à zéro par des valeurs quelconques des variables indépendantes x et y. Il faut alors nécessairement que l'on ait

$$f_1(x,y,z) = 0, \tag{82}$$

et, par conséquent, que les fonctions arbitraires de l'équation (72) ne dépendent que des coefficients des termes du second ordre.

On peut de même démontrer que les quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires de la même équation et que je désignerai par v doivent satisfaire à l'équation

$$A\frac{d^2v}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dy^2} + C\frac{d^2v}{dz^2} + D\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + E\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + F\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} = 0. \tag{83}$$

Il est très facile maintenant d'étendre aux équations à une nombre quelconque de variables ce que nous venons de faire pour les équations à quatre variables.

VIII.

Quoique le théorème sur la composition des fonctions arbitraires se trouve complétement démontré, cependant tel est son importance que nous croyons devoir en donner une nouvelle démonstration. Pour

rendre nos raisonnements plus clairs, nous prendrons pour exemple l'équation générale du second ordre à deux variables

$$R\frac{d^2z}{dx^2} + S\frac{d^2z}{dx\,dy} + T\frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Mz = 0; \tag{84}$$

mais tout ce que nous dirons rélativement à cette équation pourra être aisément étendu à une équation quelconque.

Admettons premièrement que cette équation ait une intégrale de la forme

$$z = \alpha\varphi(u), \tag{85}$$

φ étant une caractéristique de fonction arbitraire; α et u deux fonctions de x et y.

Substituant cette expression de z dans l'équation (84), on aura, comme il est facile de voir, un résultat de la forme

$$\left(R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2}\right)\varphi''(u) + f_1\varphi'(u) + f_2\varphi(u) = 0, \tag{86}$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions de x et y dont il est inutile pour notre but de connaître la forme.

Cette équation devant être identique, puisque par hypothèse la fonction $\alpha\varphi(u)$ est une intégrale de l'équation (84), il faut nécessairement qu'on ait

$$R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2} = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0. \tag{87}$$

La prémière de ces équations donne notre théorème pour le cas particulier où l'équation (84) admet une intégrale de la forme (85).

Si cette équation admettait une intégrale de la forme

$$z = \alpha\varphi(u) + \alpha_1\varphi'(u) + \cdots\cdots + \alpha_n\varphi^{(n)}(u), \tag{88}$$

$\varphi^{(n)}(u)$ étant la dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction $\varphi(u)$, en y mettant cette valeur de z, on aurait

$$\left(R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2}\right)\varphi^{(n+2)}(u) + f_{(n+1)}\varphi^{(n+1)}(u) + \cdots + f_1\varphi'(u) + f\varphi(u) = 0, \tag{89}$$

et comme cette équation doit être identique il faut nécessairement que l'on ait

$$R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2} = 0, \quad f_{n+1} = 0, \cdots\cdots f_1 = 0, \quad f = 0. \tag{90}$$

Le théorème subsiste donc encore pour ce cas.

Si l'intégrale de l'équation (84) n'a pas la forme (85) ou bien (88), on peut toujours supposer qu'elle soit représentée par

$$z = \int_h^{h'} f_1(x, y, \theta)\ \varphi[f(x, y, \theta)]\,d\theta, \tag{91}$$

φ étant une caractéristique de fonction arbitraire; h et h_1 deux constantes indépendantes de x et y; $f(x, y, 0)$, $f_1(x, y, \theta)$ deux fonctions à déterminer: car cette intégrale définie pouvant représenter une fonction quelconque de x et y peut être prise pour désigner la fonction qui satisfait à l'équation (84).

Différentiant et substituant on aura

$$\left.\begin{aligned}\int_h^{h'} f_1(x,y,\theta)\left[R\frac{d\cdot f(x,y,\theta)^2}{dx^2} + S\frac{d\cdot f(x,y,\theta)}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,\theta)}{dy} + T\frac{d\cdot f(x,y,\theta)^2}{dy^2}\right]\varphi''[f(x,y,\theta)\,d\theta\right.\\ \left. + \int_h^{h'} f_2(x,y,\theta)\,\varphi'[f(x,y,\theta)]\,d\theta + \int_h^{h'} f_3(x,y,\theta)\,\varphi[f(x,y,\theta)]\,d\theta = 0;\right.\end{aligned} \tag{92}$$

f_2 et f_3 étant deux fonctions de x, y et θ dont il est inutile de connaître les formes.

L'intégration par parties conduit à un résultat de la forme

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f_1(x,y,h')}{f_1'(x,y,h')}\left[R\frac{d\cdot f(x,y,h')^2}{dx^2}+S\frac{d\cdot f(x,y,h')}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,h')}{dy}+T\frac{d\cdot f(x,y,h')^2}{dy^2}\right]\varphi'[f(x,y,h')]\\&-\frac{f_1(x,y,h)}{f_1'(x,y,h)}\left[R\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dx^2}+S\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dy}+T\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dy^2}\right]\varphi'[f(x,y,h)]\\&+{}_1f(x,y,h')\,\varphi[f(x,y,h')]-{}_1f(y,x,h)\,\varphi[f(x,y,h)]+\int_h^{h'}{}_1f(x,y,\theta)\,\varphi(x,y,\theta)]\,d\theta=0;\end{aligned}\right\}\quad(93)$$

où $f_1'(x,y,\theta)$ désigne la dérivée de $f_1(x,y,\theta)$ par rapport à θ; ${}_1f$ et ${}_3f$ deux nouvelles fonctions de x, y et θ, dépendantes de f, f_1 et des coefficients de l'équation proposée (84).

Cette équation devant être identique, il faut que l'on ait

$$ {}_1f(x,y,\theta)=0, \quad (94)$$

$$ {}_1f(x,y,h')=0, \qquad {}_1f(x,y,h)=0, \quad (95)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f_1'(x,y,h')}{f_1'(x,y,h')}\left[R\frac{d\cdot f(x,y,h')^2}{dx^2}+S\frac{d\cdot f(x,y,h')}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,h')}{dy}+T\frac{d\cdot f(x,y,h')^2}{dy^2}\right]=0,\\&\frac{f_1(x,y,h)}{f_1'(x,y,h)}\left[R\frac{d\cdot f(x,y,h)^2}{dx^2}+S\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dy}+T\frac{d\cdot f(x,y,h)^2}{dy^2}\right]=0.\end{aligned}\right\}\quad(96)$$

L'équation (94) détermine la fonction $f_1(x,y,\theta)$ qui entre dans l'intégrale (91), et, comme elle est aux différentielles partielles, cette fonction renfermera dans son expression des constantes arbitraires en nombre infini, dont on disposera pour que les équations

$$f_1(x,y,h')=0, \quad f_1(x,y,h)=0, \quad \frac{1}{f_1'(x,y,h')}=0, \quad \frac{1}{f_1'(x,y,h)}=0, \quad (97)$$

ne puissent jamais avoir lieu. Cela est très facile, et les premiers facteurs des équations (96) ne pouvant pas se réduire à zéro, il faut nécessairement que l'on ait

$$\left.\begin{aligned}&R\frac{d\cdot f(x,y,h')^2}{dx^2}+S\frac{d\cdot f(x,y,h')}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,h')}{dy}+T\frac{d\cdot f(x,y,h')^2}{dy^2}=0\\&R\frac{d\cdot f(x,y,h)^2}{dx^2}+S\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dx}\frac{d\cdot f(x,y,h)}{dy}+T\frac{d\cdot f(x,y,h)^2}{dy^2}=0.\end{aligned}\right\}\quad(98)$$

Ces deux équations déterminent $f(x,y,h')$ et $f(x,y,h)$, et on voit bien qu'on ne peut pas prendre les quantités h et h' au hasard, car ces fonctions devant satisfaire à une même équation

$$R\frac{du^2}{dx^2}+S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+T\frac{du^2}{dy^2}=0, \quad (99)$$

ne sont que les deux valeurs que cette équation fournit pour u.

On conclut de là que si la fonction du second membre de l'équation (91) est une intégrale particulière de l'équation (84), on ne peut pas prendre la fonction $f(x,y,\theta)$ au hasard, mais au contraire la choisir telle qu'en y mettant h et h' à la place de θ on ait les deux fonctions de x et y que l'équation (99) donne pour u; et comme cette dernière équation ne dépend que des coefficients des termes du second ordre de l'équation proposée, il s'en suit que ses fonctions arbitraires ne dépendent que des termes de cet ordre.

Ayant montré comme on satisfait aux équations (94) et (96), en déterminant les fonctions $f(x,y,\theta)$ et $f_1(x,y,\theta)$, il ne reste plus qu'à satisfaire aux équations (95); chose à laquelle on arrivera au moyen des constantes en nombre infini que contient la fonction $f_1(x,y,\theta)$. Sans donc plus nous en inquiéter là-dessus, nous pouvons être sûrs qu'il sera toujours possible de satisfaire à ces

équations, car on a pris pour représenter l'intégrale de l'équation proposée une fonction ayant tout le degré de généralité désirable, et comme après on n'a mis aucune restriction à la généralité de cette fonction, elle a dû nécessairement satisfaire à notre équation proposée.

VIII.

Notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires se trouve complètement démontré. Pour faire voir maintenant toutes les conséquences qu'on en peut déduire, il faut premièrement mettre les intégrales qu'il fournit pour les équations aux différentielles partielles sous une forme plus convenable aux applications que nous en voulons faire. Les calculs du N° précédent nous serviront pour cela de beaucoup.

Pour fixer les idées, particularisons nos raisonnements à l'équation générale du second ordre (84). Ce que nous dirons pour cette équation sera applicable à une équation quelconque des ordres supérieurs et d'un nombre quelconque de variables.

On a trouvé dans le N° VI

$$_1f[x, z, f_1(x, y)] = \varphi[f_1(x, y)], \tag{100}$$

pour une des intégrales particulières de cette équation.

Supposons que l'on veuille tirer de cette équation la valeur de z en fonction de x et y et arriver à une équation de la forme

$$z = F(x, y). \tag{101}$$

Quelle est la forme que l'on doit donner à cette fonction $F(x, y)$?

Je dois observer que l'équation proposée (84) étant linéaire, d'après la théorie relative à ce genre d'équations, il faut que ses fonctions arbitraires n'entrent dans l'expression de z que d'une manière linéaire, et que par conséquent cette valeur soit de la forme

$$z = \alpha\,\varphi[f_1(x, y)]; \tag{102}$$

ou bien d'une des formes

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha\,\varphi[f_1(x, y)] + \alpha_1\,\varphi'[f_1(x, y)] + \cdots\cdots + \alpha_n\,\varphi^{(n)}[f_1(x, y)], \\ z &= \alpha\,\varphi[f_1(x, y)] + \alpha_1\,\varphi'[f_1(x, y)] + \cdots\cdots + \alpha_n\,\varphi^{(n)}[f_1(x, y)] + \cdots \\ z &= \alpha\,\varphi[f_1(x,y)] + \int \alpha_1\varphi[f_1(x,y)]\,d\cdot f(x,y) + \iint \alpha_2\varphi[f_1(x,y)]\,d^2\cdot f(x,y)^2 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

où α, α_1, α_2, etc. représentent des fonctions de x et y dépendantes des coefficientes R, S, $\cdots$ etc. de la proposée.

La valeur de z prendra l'une ou l'autre de ces formes selon la nature de la fonction $_1f$: cependant il est permis de supposer que toutes ces formes soient réductibles à la seule forme

$$z = \alpha\,\varphi[f_1(x, y)] + \alpha_1\,\varphi'[f_1(x, y)] + \alpha_2\,\varphi''[f_1(x, y)] + \text{etc.}; \tag{104}$$

car substituant cette valeur de z dans l'équation (84) et égalant à zéro les coefficients de φ et de ses dérivées successives, on aura autant d'équations que de fonctions inconnues α, α_1, α_2, etc. En faisant le calcul on trouve, après avoir fait $f_1(x, y) = u$, les équations

$$
\left.\begin{array}{l}
R\dfrac{d^2\alpha}{dx^2}+S\dfrac{d^2\alpha}{dx\,dy}+T\dfrac{d^2\alpha}{dy^2}+P\dfrac{d\alpha}{dx}+Z\dfrac{d\alpha}{dy}+N\alpha=0\\[2ex]
R\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_1}{dx}\right)}{dx}+\dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{du}{dx}\right]+S\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_1}{dx}\right)}{dy}+\dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{du}{dy}\right]\\
+T\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_1}{dy}\right)}{dy}+\dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{du}{dy}\right]+P\left(\alpha\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha}{dx}\right)+Q\left(\alpha\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha}{dy}\right)+N\alpha_1=0\\[2ex]
R\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha_1\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_2}{dx}\right)}{dx}+\left(\alpha\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_1}{dx}\right)\dfrac{du}{dx}\right]+S\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha_1\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_2}{dx}\right)}{dy}+\left(\alpha\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_1}{dx}\right)\dfrac{du}{dy}\right]\\
+T\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha_1\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_2}{dy}\right)}{dy}+\left(\alpha\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_1}{dy}\right)\dfrac{du}{dy}\right]+P\left(\alpha_1\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_2}{dx}\right)+Q\left(\alpha_1\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_2}{dy}\right)\\
+N\alpha_2=0\\[2ex]
R\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha_2\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_3}{dx}\right)}{dx}+\left(\alpha_1\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_2}{dx}\right)\dfrac{du}{dx}\right]+S\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha_2\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_3}{dx}\right)}{dy}+\left(\alpha_1\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_2}{dx}\right)\dfrac{du}{dy}\right]\\
+T\left[\dfrac{d\cdot\left(\alpha_2\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_2}{dy}\right)}{dy}+\left(\alpha_1\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_2}{dy}\right)\dfrac{du}{dy}\right]+P\left(\alpha_2\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d\alpha_3}{dx}\right)+Q\left(\alpha_2\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\alpha_3}{dy}\right)\\
+N\alpha_3=0\\[2ex]
\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}
\end{array}\right\}\quad(105)
$$

qui peuvent s'écrire plus simplement si l'on a égard à l'équation

$$R\frac{du^2}{dx^2}+S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+T\frac{du^2}{dy^2}=0. \qquad (106)$$

La première de ces équations donne α; la seconde α_1 après que l'on a déterminé α; la troisième α_2 au moyen de ces deux premières quantités et ainsi de suite. Si l'on savait intégrer l'équation en α et déterminer α_n en fonction de x et y on aurait complètement déterminé l'intégrale en suite (104) de l'équation proposée. Quoiqu'il ne soit pas nécessaire d'intégrer complètement la première des équations (105), mais simplement de trouver une fonction qui la satisfasse, cependant cette détermination, ainsi que celle de la loi que suivent les différents coefficients α, α_1, α_2, etc. de la suite (104) est très difficile à faire. Heureusement les principaux usages que nous allons faire de cette suite remarquable n'exigent aucunement que l'on connaisse ces coefficients.

Ce que nous venons de faire relativement à l'intégrale particulière (100) de l'équation (84) pouvant être applicable exactement à l'autre intégrale, on aura encore pour z une suite de la forme (104), et comme la proposée est linéaire, la somme de ces deux suites savoir

$$\left.\begin{array}{l}
z=\alpha\varphi[f_1(x,y)]+\alpha_1\varphi'[f_1(x,y)]+\alpha_2\varphi''[f_1(x,y)]+\text{etc.}\\
\quad+\beta\psi[f_2(x,y)]+\beta_1\psi'[f_2(x,y)]+\beta_2\psi''[f_2(x,y)]+\text{etc.},
\end{array}\right\}\quad(107)$$

sera son intégrale générale. Dans cette équation $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ désignent les deux valeurs que l'équation (106) donne pour u; α, α_1, α_2, etc. β, β_1, β_2, etc. les deux suites de valeurs que les équations (105) donnent pour α, α_1, α_2, etc. quand on y met les deux valeurs précédentes de u.

D'après les calculs du N° précédent, on peut aussi mettre cette expression de z sous la forme

$$\left.\begin{aligned} z &= \int_a^b F_1(x,y,\theta)\,\varphi[{}_1f(x,y,\theta)]\,d\theta \\ &+ \int_b^b F_2(x,y,\theta)\,\varphi[{}_2f(x,y,\theta)]\,d\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

$F_1(x,y,\theta)$ et $F_2(x,y,\theta)$ étant deux fonctions dépendantes des coefficients de l'équation proposée, et ${}_1f(x,y,\theta)$, ${}_2f(x,y,\theta)$ deux autres fonctions telles que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} {}_1f(x,y,a) &= f_1(x,y) & {}_1f(x,y,b) &= f_2(x,y) \\ {}_2f(x,y,a) &= f_1(x,y) & {}_2f(x,y,b) &= f_2(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

on bien

$${}_1f(x,y,a) = {}_1f(x,y,b) = f_1(x,y), \qquad {}_2f(x,y,a) = {}_2f(x,y,b) = f_2(x,y). \qquad (110)$$

Quand il s'agit de déterminer les lois générales qui régissent les phénomènes de Mécanique ou de Physique, ces deux expressions de z ont le même dégré d'importance et de généralité; nous ferons pourtant plus fréquemment usage de l'expression en suite parce qu'elle facilite plus les raisonnements; mais si l'on faisait quelque objection à des conclusions tirées de développements en suites on n'aurait qu'à recourir pour les justifier à l'expression de z mise sous la forme (108).

Ce que nous venons de faire pour l'équation (84) s'étend sans la moindre difficulté à des équations des ordres supérieurs et à un nombre quelconque de variables.

IX.

Avant de montrer l'usage de la suite (107) et d'autres du même genre dans la solution des problèmes de Mécanique et de Physique mathématique, montrons l'utilité de notre théorème dans l'intégration des équations, aux différentielles partielles.

Le problème d'intégrer une équation différentielle

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \text{ etc.}\right) = 0 \qquad (111)$$

consiste à trouver la fonction la plus générale de x et y qui, mise à la place de z, satisfait à cette équation: on peut même dire tout simplement qu'il consiste à trouver une fonction qui satisfasse à cette équation, puisque la première question peut être toujours réduite à celle-ci.

Si le Calcul intégral était déjà bien avancé, on saurait toujours pour chaque forme de la fonction f, quel était l'expression que l'on devrait prendre pour z: malheureusement on ne sait intégrer qu'un très petit nombre d'équations *, toutes les méthodes d'intégration ne consistant qu'en une suite s'essais le plus souvent infructueux. La méthode d'intégration que nous allons exposer quoique exigeant quelques tâtonnements pour trouver la forme de la fonction inconnue z ne doit donc pas être rejetée, les tâtonnements y étant même mieux réglés que dans la plupart des méthodes ordinaires, car on ne prend pas au hazard la forme de la fonction qui doit représenter z, cette fonction étant en partie

* Cela a été écrit en 1848, quelques années avant que j'eusse trouvé le moyen d'intégrer une équation différentielle quelconque ainsi que l'on a vu dans le Mémoire qui est à la tête de ce Recueil.

déterminée par la connaissance que nous avons de la forme des fonctions arbitraires, données par notre théorème.

Pour faire voir cette méthode, commençons pour prendre des exemples particuliers.

Soit premièrement l'équation

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + zxy \frac{d^2 z}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0. \tag{112}$$

Ses fonctions arbitraires dépendant des équations

$$x^2 \frac{du^2}{dx^2} + zxy \frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + y^2 \frac{du^2}{dy^2} = 0, \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy, \tag{113}$$

sont

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{114}$$

Si donc l'intégrale de l'équation (112) de la proposée peut s'écrire sons forme finie sans le signe de différentiation, et d'intégration définie ou indéfinie, et à l'aide seulement de ceux qui sont employés dans l'Algébre ordinaire, savoir le signe de division, multiplication, élévation de puissances, extraction de racines et les signes log., sin., cos., tang. ainsi que de ceux des opérations inverses dont on se sert dans la Trigonométrie, il est facile de voir que le valeur de z ne peut avoir que cette forme

$$z = X\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + Y\psi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{115}$$

φ et ψ étant deux caractéristiques de fonctions arbitraires, X et Y deux fonctions de x et y qu'il faut déterminer.

Cela résulte facilement de la théorie des équations différentielles linéaires.

Comme les deux fonctions

$$X\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad Y\psi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{116}$$

à cause de l'indépendance de φ et ψ doivent satisfaire séparément à l'équation (112), prenons prémièrement

$$z = X\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{117}$$

et déterminons X.

Différentiant cette équation et substituant les résultats dans l'équation (112), égalant à zéro les coefficients de φ et de ses dérivées, on aura les trois équations

$$\left.\begin{aligned} &x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 X}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2 X}{dy^2} = 0, \\ &2y\left(\frac{X}{x} - \frac{dX}{dx}\right) + 2y\left(\frac{dX}{dx} - \frac{X}{x} - \frac{y}{x}\frac{dX}{dy}\right) + 2y\frac{y}{x}\frac{dX}{dy} = 0, \\ &\frac{Xy^2}{x^2} - 2\frac{Xy^2}{x^2} + \frac{Xy^2}{x^2} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

qui doivent déterminer X.

Les deux dernières de ces équations étant identiquement nulles il ne reste que la première pour déterminer X, et comme cette équation a la même forme que la proposée on pourrait croire que la solution du problème ne se trouve aucunement avancée. Mais cela n'est pas vrai si l'on fait attention à ce que la fonction arbitraire dè la proposée ayant été déterminée, il ne s'agit que de trouver une valeur pour X satisfaisant à la première équation (118) et aucunement de l'intégrer complètement.

C'est à dire que le problème de trouver la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation (112), se trouve réduit à celui de trouver une fonction qui satisfait tout simplement à la même équation.

On voit tout de suite que l'on satisfait à cette équation en prenant pour X une constante. Si l'on suppose encore X indépendant de y, cette équation se réduisant à

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \tag{119}$$

on la satisfait encore en prenant pour X la simple fonction x. La forme de la même équation montre immédiatement qu'il est aussi permis de poser $X = y$.

Mettant ces trois valeurs que l'on vient de trouver pour X dans l'équation (117), on aura autant d'intégrales particulières de l'équation proposée. D'ailleurs comme l'équation qui doit déterminer Y, à cause que dans l'exemple que nous avons choisi les fonctions arbitraires ont la même forme, est la même qui détermine X, en prenant par Y quelques unes des trois valeurs que nous avons trouvées pour X, et combinant deux-à-deux par l'addition les différentes valeurs qui en résulteront pour les deux fonctions (116), on aura les trois formes d'intégrales suivantes

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\,\psi\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\,\psi\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\,\psi\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

pour intégrales de l'équation (112).

Faisant attention à ce que l'on peut remplacer $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ par $\frac{y}{x}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, la dernière de ces équations prenant la forme

$$z = y\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\,\psi\left(\frac{y}{x}\right) = y\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = y\,\Psi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{121}$$

n'est qu'une intégrale particulière et doit être par conséquent rejetée. Quand aux deux autres valeurs de z, puisque les deux expressions $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ sont équivalentes, elles ne diffèrent pas l'une de l'autre.

Si l'on prend pour second exemple l'équation

$$y\frac{d^2z}{dx^2} - (y+x)\frac{d^2z}{dx\,dy} + x\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{y+x}{y-x}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx}\right) = 0; \tag{122}$$

ses fonctions arbitraires, données par l'équation

$$y\frac{du^2}{dx^2} - (y+x)\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + x\frac{du^2}{dy^2} = 0, \tag{123}$$

étant

$$\varphi(x+y), \qquad \psi(x^2+y^2), \tag{124}$$

on prendra par son intégrale présumée

$$z = X\varphi(x+y) + Y\psi(x^2+y^2). \tag{125}$$

Substituant cette valeur de z dans la proposée et égalant à zéro des coefficients des deux fonctions arbitraires ainsi que de ses dérivées, on aura

$$\left.\begin{aligned} &y\frac{d^2X}{dx^2} - (y+x)\frac{d^2X}{dx\,dy} + x\frac{d^2X}{dy^2} + \frac{y+x}{y-x}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) = 0, \\ &2y\frac{dX}{dx} - (y+x)\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dX}{dy}\right) + 2x\frac{dX}{dy} + \frac{y+x}{y-x}(X-X) = 0, \\ &yX - (y+x)X + xX = 0, \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

pour les équations qui doivent déterminer X; et

$$\left.\begin{aligned} &y\frac{d^2Y}{dx^2} - (y+x)\frac{d^2Y}{dx\,dy} + x\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{y+x}{y-x}\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dY}{dy}\right) = 0 \\ &y\left(4x\frac{dY}{dx} + 2Y\right) - (y+x)\left(2y\frac{dY}{dx} + 2x\frac{dY}{dy}\right) + x\left(4y\frac{dY}{dy} + 2Y\right) + \frac{y+x}{y-x}(2xY - 2yY) = 0 \\ &4yx^2Y - 4(y+x)\,xyY + 4xy^2Y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (127)$$

pour celles qui doivent donner Y.

On satisfait à ces équations en supposant que X et Y sont des constantes. On aura alors

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x^2+y^2) \quad (128)$$

pour l'intégrale de l'équation (122).

X.

Dans les exemples précédents on a toujours trouvé pour déterminer les fonctions X ou Y trois équations dont l'une était identique, et l'autre avait la même forme que l'équation proposée. Cela n'est pas particulier aux exemples que nous avons pris, mais a lieu pour l'équation générale du second ordre (84), quand on suppose que son intégrale soit de la forme

$$z = X\varphi(u), \quad (129)$$

u étant une des fonctions déterminée par l'équation (106). En effet, faisant la substitution et égalant à zéro les coefficients de φ et de ses dérivées première et seconde, on aura

$$\left.\begin{aligned} &R\frac{d^2X}{dx^2} + S\frac{d^2X}{dx\,dy} + T\frac{d^2X}{dy^2} + P\frac{dX}{dx} + Q\frac{dX}{dy} + NX = 0, \\ &R\left(2\frac{dX}{dx}\frac{du}{dx} + X\frac{d^2u}{dx^2}\right) + S\left(\frac{dX}{dx}\frac{du}{dy} + X\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{dX}{dy}\frac{du}{dx}\right) + T\left(2\frac{dX}{dy}\frac{du}{dy} + X\frac{d^2u}{dy^2}\right) \\ &\qquad + PX\frac{du}{dx} + QX\frac{du}{dy} = 0 \\ &R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + T\frac{du^2}{dy^2} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

or la première de ces équations a exactement la forme de la proposée, et la dernière est identique, puisque c'est à son moyen que l'on a déterminé la fonction u.

Après qu'on aura déterminé u, une des deux premières équations donnera X, et substituant dans l'autre la valeur trouvée pour cette variable on aura une équation entre les coefficients de la proposée, qui exprimera, en conséquence, une condition à laquelle ils doivent satisfaire pour que cette équation puisse admettre une intégrale de la forme (129). La seconde de ces équations étant du premier ordre c'est elle qu'il faut choisir pour déterminer X.

En faisant donc pour abréger

$$\left.\begin{aligned} &2R\frac{du}{dx} + S\frac{du}{dy} = P_1 \qquad 2T\frac{du}{dy} + S\frac{du}{dx} = Q_1 \\ &R\frac{d^2u}{dx^2} + S\frac{d^2u}{dx\,dy} + T\frac{du^2}{dy^2} + P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} = -R_1 \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

on aura

$$P_1 \frac{dX}{dx} + Q_1 \frac{dX}{dy} = R_1 X, \tag{132}$$

pour déterminer X.

On sait encore que l'on peut faire dépendre la détermination de cette fonction de l'intégration du système

$$P_1 dy - Q_1 dx = 0, \qquad P_1 dx - R_1 dx = 0. \tag{133}$$

Connaissant X on mettra sa valeur dans la première équation (130) et on aura ainsi formé l'équation de condition à laquelle sont assujettis les coefficients de la proposée pour qu'elle puisse admettre une intégrale de la forme (129).

Très-souvent dans les applications il n'est pas nécessaire d'exécuter aucune intégration pour reconnaître si cette forme est admissible: le simple rapprochement des deux premières équations (130) sera suffisant. Ainsi si l'on prend pour exemple l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dy^2} + f(x, y)\, z, \tag{134}$$

ses fonctions arbitraires étant

$$\varphi(x+y), \qquad \psi(x-y), \tag{135}$$

si l'on suppose son intégrale de la forme

$$z = X\varphi(x+y) + Y\psi(x-y), \tag{136}$$

on trouvera

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 X}{dy^2} + f(x, y)\, X, \qquad \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dy}, \qquad X = X; \tag{137}$$

pour les équations qui doivent déterminer X.

La seconde équation donne

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 X}{dx\, dy} = \frac{d \cdot \frac{dX}{dx}}{dy} = \frac{d^2 X}{dy^2}, \tag{138}$$

ce qui réduit la première à

$$f(x, y)\, X = 0, \tag{139}$$

et fait voir qu'il est impossible de donner à l'intégrale de l'équation (134) la forme $X\varphi(x+y)$ que nous lui avions supposée. On prouvera de la même manière que l'on ne pourra pas encore prendre $Y\varphi(x-y)$ pour l'intégrale de la même équation.

XI.

Quand on reconnait que l'équation ne peut pas avoir une intégrale de la forme (129), on doit essayer s'il est possible que l'on ait

$$z = X\varphi(u) + X_1 \varphi'(u). \tag{140}$$

Si z ne peut pas encore avoir cette forme, on essaiera cette autre

$$z = X\varphi(u) + X_1 \varphi'(u) + X_2 \varphi''(u), \tag{141}$$

et ainsi de suite, prenant pour z d'autres expressions renfermant des derivées encore supérieures de $\varphi(u)$. Mais au lieu de traiter chacun de ces cas en particulier considérons le cas général où z est donné par le polynome d'un ordre quelconque

$$z = \alpha\varphi(u) + \alpha_1\varphi'(u) + \alpha_2\varphi''(u) + \alpha_3\varphi'''(u) + \text{etc.} \qquad (142)$$

Si l'on suppose premièrement que cette série se prolonge à l'infini, on trouvera pour déterminer ses coefficients la suite des équations (105), ou plutôt celles-ci

$$\left.\begin{aligned}
&R\frac{d^2\alpha}{dx^2} + S\frac{d^2\alpha}{dx\,dy} + T\frac{d^2\alpha}{dy^2} + P\frac{d\alpha}{dx} + Q\frac{d\alpha}{dx} + N\alpha = 0,\\
&R\left[\frac{d\cdot\left[\alpha\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_1}{dx}\right]}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}\frac{du}{dx}\right] + S\left[\frac{d\cdot\left[\alpha\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_1}{dx}\right]}{dy} + \frac{d\alpha}{dx}\frac{du}{dy}\right]\\
+\,&T\left[\frac{d\cdot\left[\alpha\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_1}{dy}\right]}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{du}{dy}\right] + P\left[\alpha\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_1}{dx}\right] + Q\left[\alpha\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_1}{dy}\right] + N\alpha_1 = 0,\\
&R\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_1\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_2}{dx}\right]}{dx} + \frac{d\alpha_1}{dx}\frac{du}{dx}\right] + S\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_1\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_2}{dx}\right]}{dy} + \frac{d\alpha_1}{dx}\frac{du}{dy}\right]\\
+\,&T\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_1\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_2}{dy}\right]}{dy} + \frac{d\alpha_1}{dy}\frac{du}{dy}\right] + P\left[\alpha_1\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_2}{dx}\right] + Q\left[\alpha_1\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_2}{dy}\right] + N\alpha_2 = 0,\\
&R\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_2\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_3}{dx}\right]}{dx} + \frac{d\alpha_2}{dx}\frac{du}{dx}\right] + S\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_2\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_3}{dx}\right]}{dy} + \frac{d\alpha_2}{dx}\frac{du}{dy}\right]\\
+\,&T\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_2\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_3}{dy}\right]}{dy} + \frac{d\alpha_2}{dy}\frac{du}{dy}\right] + P\left[\alpha_2\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_3}{dx}\right] + Q\left[\alpha_2\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_3}{dy}\right] + N\alpha_3 = 0,\\
&R\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_3\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_4}{dx}\right]}{dx} + \frac{d\alpha_3}{dx}\frac{du}{dx}\right] + S\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_3\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_4}{dx}\right]}{dy} + \frac{d\alpha_3}{dx}\frac{du}{dy}\right]\\
+\,&T\left[\frac{d\cdot\left[\alpha_3\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_4}{dy}\right]}{dy} + \frac{d\alpha_3}{dy}\frac{du}{dy}\right] + P\left[\alpha_3\frac{du}{dx}+\frac{d\alpha_4}{dx}\right] + Q\left[\alpha_3\frac{du}{dy}+\frac{d\alpha_4}{dy}\right] + N\alpha_4 = 0\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

eu égard à l'équation (106) qui permet d'y faire une petite réduction.

On voit déjà un avantage sous le rapport de l'intégration d'avoir pris pour z une suite de la forme (142), ou d'avoir déterminé u au moyen de l'égalité (106); chacun des coefficients α_n de l'intégrale en suite étant donné tout simplement en fonction de celui qui le précède immédiatement au lieu de l'être en fonction des deux autres α_{n-1}, α_{n-2}. Si l'on fait, pour abréger,

$$R\frac{d^2\alpha_n}{dx^n} + S\frac{d^2\alpha_n}{dx\,dy} + T\frac{d^2\alpha_n}{dy^2} + P\frac{d\alpha_n}{dx} + Q\frac{d\alpha_n}{dy} + N\alpha_n = [\alpha_n], \qquad (144)$$

les équations précédentes deviendront

$$
\left.\begin{aligned}
&[\alpha] = 0,\\
&R\left[2\frac{du}{dx}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\alpha\right] + S\left[\frac{du}{dy}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d^2u}{dx\,dy}\alpha\right] + T\left[2\frac{du}{dy}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\alpha\right]\\
&\qquad + P\frac{du}{dx}\alpha + Q\frac{du}{dy}\alpha + [\alpha_1] = 0,\\
&R\left[2\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\alpha_1\right] + S\left[\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_1}{dy}+\frac{d^2u}{dx\,dy}\alpha_1\right] + T\left[2\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_1}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\alpha_1\right]\\
&\qquad + P\frac{du}{dx}\alpha_1 + Q\frac{du}{dy}\alpha_1 + [\alpha_2] = 0,\\
&R\left[2\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\alpha_2\right] + S\left[\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_2}{dy}+\frac{d^2u}{dx\,dy}\alpha_2\right] + T\left[2\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_2}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\alpha_2\right]\\
&\qquad + P\frac{du}{dx}\alpha_2 + Q\frac{du}{dy}\alpha_2 + [\alpha_3] = 0,\\
&R\left[2\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_3}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\alpha_3\right] + S\left[\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_3}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_3}{dy}+\frac{d^2u}{dx\,dy}\alpha_3\right] + T\left[2\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_3}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\alpha_3\right]\\
&\qquad + P\frac{du}{dx}\alpha_3 + Q\frac{du}{dy}\alpha_3 + [\alpha_4] = 0,\\
&\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (145)
$$

et feront mieux voir la loi de cette dépendance.

Si l'on suppose à présent que la suite (142) se termine au terme $\alpha_n \varphi^{(n)}(u)$, on remarquera: 1° qu'il y aura une équation de plus qu'il y a d'inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, et, par conséquent, que l'on aura une équation de condition entre les coefficients de la proposée pour qu'elle puisse admettre une intégrale de cette forme; 2° que la dernière de ces équations se réduisant à

$$
R\left[2\frac{du}{dx}\frac{dx_n}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\alpha_n\right] + S\left[\frac{du}{dy}\frac{d\alpha_n}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{d\alpha_n}{dy}+\frac{d^2u}{dx\,dy}\alpha_n\right] + T\left[2\frac{du}{dy}\frac{d\alpha^n}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\alpha_n\right]
+ P\frac{du}{dx}\alpha_n + Q\frac{du}{dy}\alpha_n = 0, \quad (146)
$$

on aura pour déterminer α_n une équation linéaire du premier ordre; 3° que, d'après la forme de ces équations, après avoir déterminé le coefficient α_n, on aura pour déterminer les autres des équations qui seront toutes linéaires et du premier ordre, chacune de ces variables étant déterminée par son équation; 4° que chacune de ces équations étant de la forme

$$
f_1(x,y)\frac{d\alpha_m}{dx} + f_2(x,y)\frac{d\alpha_m}{dy} = f_3(x,y), \quad (147)
$$

et son intégrale dépendant de celles de deux des équations

$$
\left.\begin{aligned}
&f_1(x,y)\,dy - f_2(x,y)\,dx = 0, \qquad f_1(x,y)\,du - f_3(x,y)\,dx = 0,\\
&f_3(x,y)\,dy - f_2(x,y)\,du = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (148)
$$

après que l'on aura intégré la première, et déterminé y en fonction de x, ou *vice-versa* x en fonction de y, on obtiendra tout de suite l'intégrale d'une des deux autres, car les variables s'y trouveront séparées; 5° enfin qu'après que l'on aura déterminé tout les coefficients α_n, $\alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$ et α, substituant la valeur qu'on aura trouvée pour cette dernière quantité dans la première des équations (145), on obtiendra l'équation de condition à laquelle dovient satisfaire les coefficients de la proposée pour qu'elle puisse admettre une intégrale de la forme

$$
z = \alpha\varphi(u) + \alpha_1\varphi'(u) + \cdots\cdots + \alpha_n\varphi^{(n)}(u). \quad (149)
$$

Il y a un cas très-général, qui se présente souvent dans les applications à la Mécanique et à la Physique, où les formules précédentes se simplifient de beaucoup: c'est celui où les coefficients de la proposée sont des fonctions d'une seule des variables, x par exemple. Dans ce cas, ainsi qu'il est facile de le voir, les valeurs de u déduites de l'égalité (106) étant toutes deux de la forme

$$y + f_1(x), \qquad y + f_2(x), \tag{150}$$

la variable y disparaîtra de touts les coefficients des équations (145), et l'on pourra, en conséquence, les intégrer immédiatement. On obtiendra donc l'intégrale de la proposée, si cette intégrale est possible ou si l'équation de condition se trouve satisfaite.

XII.

La méthode d'intégration que l'on vient d'exposer peut remplacer avec avantage celle de Monge, qui, faisant dépendre l'intégration de l'équation générale du second ordre (84) du système des deux équations (49) à cinq variables, sans indiquer aucunement comment on doit après procéder à la recherche des fonctions primitives, semble être plutôt un théorème qu'une méthode d'intégration. Celle que nous venons d'exposer au contraire est loin de mériter ce reproche; tout y est réglé et déterminé. Au lieu de prendre des fonctions de x et y au hasard pour essaier si elles satisfont à l'équation proposée, et arriver ainsi à l'intégrale de l'équation pour une espèce de dévination, nous avons déterminé, en grande partie d'avance, au moyen de notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires, les formes qu'elles doivent avoir, et ces formes indiquées, on a montré comment trouver l'intégrale quand le problème est possible. Cette méthode se recommande d'ailleurs par sa simplicité dans les applications. Si nous prenons, en effet, pour exemple les équations qui se trouvent intégrées dans les traités de Calcul intégral nous trouverons avec une très-grande facilité leurs fonctions primitives en suivant la marche que nous venons de tracer.

Je dois ajouter que nous n'avons pas pris pour désigner z toutes les formes que cette fonction peut avoir pour être écrite en termes finis sans faire usage du signe d'intégration définie. Aux formes comprises dans l'équation (104) on doit encore ajouter celles que l'on tire de

$$z = \alpha\varphi(u) + \alpha_1\int\beta_1\varphi(u)\,dx + \alpha_2\iint\beta_2\varphi(u)\,dx^2 + \text{etc.}, \tag{151}$$

lorsqu'on suppose que la suite se termine au second, troisième, quatrième, etc. terme, et d'autres qui résultent de la combinaison de ces deux valeurs de z. Il faut pourtant remarquer que cette expression de z en la supposant finie peut toujours être mise sous la forme

$$z = \beta_1\int_1\beta\,\varphi(u)\,dx + \alpha\varphi(u) + \alpha_1\varphi'(u) + \cdots\cdots + \alpha_n\varphi^{(n)}(u), \tag{152}$$

qui comprend comme cas particulier l'autre expression de z que nous avions premièrement donnée. Pour faire voir que cette expression de z est équivalente à celle qui a été écrite plus haut, il suffit de remarquer qu'en la supposant composée de $n+1$ termes et en remplaçant $\varphi(u)$ par la dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre de cette fonction, l'intégration par parties appliquées m fois de suite sur le terme où il y a m intégrations indiquées conduit tout de suite à cette expression.

Je dois encore observer que si l'on supposait dans l'expression de z des intégrales par rapport aussi à la variable y, on n'aurait pas une expression plus générale que celle à laquelle nous nous sommes

dernièrement arretés, car il est facile de voir que l'on peut transformer les intégrations par rapport à y dans d'autres relatives à x. L'expression (151) est donc la plus générale que l'on peut prendre pour exprimer la valeur de z sous forme finie sans faire usage de la caractéristique d'intégration définie. Substituant cette valeur de z dans l'équation générale du second ordre on trouvera facilement les équations qui doivent déterminer les indéterminées α, α_1, α_2 etc., β_1 et ${}_1\beta$, ainsi que les conditions auxquelles sont assujetis les coefficients de la proposée pour qu'elle puisse admettre une intégrale de cette forme.

La méthode que nous venons d'exposer pour intégrer l'équation générale du second ordre en termes finis, quand cela est possible, peut être étendue facilement à des équations des ordres supérieurs. Si l'on prend, par exemple, l'équation du troisième ordre et à trois variables et l'on suppose que son intégrale soit de la forme (149), on aura pour déterminer ses coefficients des équations linéaires analogues aux équations (145), mais du second ordre, lesquelles pourront être traitées comme l'équation (147) l'a été. Par le même procédé, on fera dépendre l'intégration de l'équation générale de l'ordre n, en termes finis, quand cela est possible, de l'intégration d'une ou de plusieurs équations linéaires aussi mais du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre; l'intégration de ces dernières équations dépendront après d'autres de l'ordre $n-2$, etc. et ainsi de suite jusqu'au premier ordre. Il faut observer que les différents groupes d'où dépend l'intégration de l'équation proposée ne forment pas des systèmes d'équations simultanées, mais que chacune détermine sa variable fonction en particulier.

La même méthode peut aussi être étendue aux équations à plus de trois variables, mais les équations que l'on peut alors intégrer en termes finis est en si petit nombre qu'à moins que nous n'ayons pas une équation dont nous voudrons étudier la forme d'une manière toute spéciale il ne vaut presque la peine d'en faire le calcul.

XIII.

Quand l'équation proposée ne peut pas être intégrée par ce qui précède, c'est aux intégrales définies qu'il faut avoir recours; et ici notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires est aussi important que lorsqu'il s'agit d'obtenir des intégrales en termes finis. Ce que l'on a déjà lu dans le N° VII montre assez clairement comme il peut être employé dans une telle recherche: nous allons mieux le faire sentir en prenant quelques exemples.

Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{m}{x^2}z\right). \tag{153}$$

Ses fonctions arbitraires étant

$$\varphi(x+at), \qquad \psi(x-at), \tag{154}$$

son intégrale, d'après notre théorème, pourra toujours être mise sous la forme

$$z = \int_0^{\pi} X\varphi(x\cos\theta + at)\,d\theta + \int_0^{\pi} X_1\psi(x\cos\theta + at)\,d\theta; \tag{155}$$

X et X_1 étant deux fonctions de x, t et θ qu'il s'agit de déterminer.

A cause que les fonctions φ et ψ sont arbitraires, chacune de ces intégrales doit satisfaire séparément à la proposée; mettant donc pour plus de commodité $\sin^r\theta X$ à la place de X, on aura

$$z = \int_0^\pi X \sin^r\theta\,\varphi(x\cos\theta + at)\,d\theta, \tag{156}$$

pour une de ses intégrales particulières.

La forme de cette équation permet de supposer X constant par rapport à t. Différentiant alors z dans cette supposition et substituant, on aura, après une petite réduction facile à faire,

$$\left.\begin{aligned} &-\int_0^\pi X\sin^{r+2}\theta\,\varphi''(x\cos\theta+at)\,d\theta + 2\int_0^\pi \frac{dX}{dx}\sin^r\theta\cos\theta\,\varphi'(x\cos\theta+at)\,d\theta \\ &+\int_0^\pi \frac{d^2X}{dx^2}\sin^r\theta\,\varphi(x\cos\theta+at)\,d\theta - \int_0^\pi \frac{X}{x^2}\sin^r\theta\,\varphi(x\cos\theta+at)\,d\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

L'intégration par parties transforme cette équation en

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \left(-\frac{d\cdot\left[\frac{d\cdot\left(\frac{X}{x}\sin^{r+1}\theta\right)}{x\sin\theta\,d\theta}\right]}{d\theta} + 2\frac{d\cdot\left(\frac{1}{x}\frac{dX}{dx}\sin^{r-1}\theta\cos\theta\right)}{d\theta} + \frac{d^2X}{dx^2}\sin^r\theta - m\frac{X}{x^2}\sin^r\theta\right)\varphi(x\cos\theta+at)\,d\theta \\ &+\left[\frac{X}{x}\sin^{r+1}\theta\,\varphi'(x\cos\theta+at) + \frac{d\cdot\left(\frac{X}{x}\sin^{r+1}\theta\right)}{x\sin\theta\,d\theta}\varphi(x\cos\theta+at) - \frac{2}{x}\frac{dX}{dx}\sin^{r-1}\theta\cos\varphi(x\cos\theta+at)\right]_0^\pi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

en faisant par convention

$$[f(x,h') - f(x,h)] = [f(x,\theta)]_h^{h'}. \tag{159}$$

Pour satisfaire à cette équation, on déterminera X par l'équation

$$-\frac{d\cdot\left[\frac{d\cdot\left(\frac{X}{x}\sin^{r-1}\theta\right)}{x\sin\theta\,d\theta}\right]}{d\theta} + 2\frac{d\cdot\left(\frac{1}{x}\frac{dX}{dx}\sin^{r-1}\theta\cos\theta\right)}{d\theta} + \frac{d^2X}{dx^2}\sin^r\theta - m\frac{X}{x^2}\sin^{r-1}\theta = 0; \tag{160}$$

cette variable devant après satisfaire à l'équation

$$\frac{X}{x}\sin^{r-1}\theta\,\varphi'(x\cos\theta+at) + \frac{d\cdot\left(\frac{X}{x}\sin^{r-1}\theta\right)}{x\sin\theta\,d\theta}\varphi(x\cos\theta+at) - \frac{2}{x}\frac{dX}{dx}\sin^{r-1}\theta\cos\theta\,\varphi(x\cos\theta+at) = 0. \tag{161}$$

lorsqu'on y fait $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Exécutant les différentiations indiquées, multipliant tous ses termes par x^2 et divisant par $\sin^r\theta$, la première de ces équations deviendra

$$\left.\begin{aligned} &-\left[\frac{d^2X}{d\theta^2} + r\frac{dX}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta} + (r+1)(r-1)X\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - (r-1)X + (r+1)\frac{dX}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right] \\ &+2x\left[\frac{d^2X}{d\theta\,dx}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + (r-1)\frac{dX}{dx}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{dX}{dx}\right] + x^2\frac{d^2X}{dx^2} - mX = 0. \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

Si l'on fait $X = x^h\psi$, h étant une constante et ψ une fonction de θ seulement, x disparaîtra de cette équation et on aura

$$\left.\begin{aligned} &-\left[\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+r\frac{d\psi}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}+(r+1)(r-1)\psi\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-(r+1)\psi+(r+1)\frac{d\psi}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right] \\ &+2h\left[\frac{d\psi}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+(r-1)\psi\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\psi\right]+h(h-1)\psi-m\psi=0; \end{aligned}\right\} \quad (163)$$

ou bien

$$[-(r+1)(r-1)+2h(r-1)]\psi\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+[r+1-2h+h(h-1)-m]\psi=0, \quad (164)$$

si l'on suppose à la fois que ψ soit constant par rapport à θ.

Pour satisfaire à cette équation, on déterminera h et r par les équations

$$-(r+1)(r-1)+2h(r-1)=0, \qquad r+1-2h+h(h-1)-m=0, \quad (165)$$

qui se réduisent après quelques simplifications à

$$2h=r+1, \qquad h(h-1)-m=0, \quad (166)$$

ou bien à

$$r=1, \qquad (h-2)(h-1)-m=0. \quad (167)$$

L'équation aux limites (161), en y mettant au lieu de X sa valeur et exécutant les différentiations indiquées, prendra la forme

$$x\sin^{r+1}\theta\varphi'(x\cos\theta+at)+[r+1-2h]\sin^{r-1}\theta\cos\theta\varphi(x\cos\theta+at)=0, \quad (168)$$

ou

$$x\sin^{r+1}\theta\varphi'(x\cos\theta+at)=0, \quad (169)$$

si l'on détermine les constantes r et h par les égalités (166).

Cette dernière équation devant avoir lieu pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$, suppose que le nombre $r+1$, et, par conséquent h, soit positif.

Si l'on avait adopté pour r et h les valeurs déduites des équations (167) on n'aurait pas pu satisfaire à l'équation (168).

Désignant donc par h_1 et h_2 les deux racines de la seconde des équations (166) on aura

$$z=x^{h_1}\int_0^{\pi}\varphi(x\cos\theta+at)\sin 2h_1{}^{-1}\theta\,d\theta+x^{h_2}\int_0^{\pi}\psi(x\cos\theta+at)\sin 2h_2{}^{-1}\theta\,d\theta \quad (170)$$

pour l'intégrale de l'équation proposée, telle que Poisson l'a trouvée dans le 19e cahier du Journal de l'école Polytechnique.

Si l'on prend pour second exemple l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{a^2}{x^2}\left(\frac{d^2z}{d^2x}-\frac{m}{x^2}z\right); \quad (171)$$

faisant attention à ce que ses fonctions arbitraires, dépendantes des équations

$$\frac{du^2}{dt^2}=\frac{a^2}{x^2}\frac{du^2}{dx^2}, \qquad du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dx}dt, \quad (172)$$

sont

$$\varphi\left(at+\frac{1}{2}x^2\right), \qquad \psi\left(at-\frac{1}{2}x^2\right), \quad (173)$$

on trouvera pour son intégrale, procédant comme dans le premier exemple,

$$z=x^h\int_0^{\pi}\varphi\left(\frac{1}{2}x^2\cos\theta+at\right)\sin^{\frac{h-1}{2}}\theta\,d\theta \quad (174)$$

h' étant une racine de l'équation $h(h-1)-m=0$ telle pourtant que l'on ait $\frac{h-1}{2} > 2$ ou $= 2$ Comme la somme des deux valeurs de h est égale à l'unité, toutes les deux ne peuvent pas satisfaire à cette condition et ne peuvent pas, en conséquence, être employées pour former l'intégrale générale de la proposée. Il est pourtant facile de l'avoir en partant de l'intégrale particulière déjà trouvée et en s'aidant de la forme de cette équation.

XIV.

Résumons en peu de mots la méthode précédente, en prenant, pour fixer les idées, l'équation

$$c\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} = P\frac{d^2z}{dx^2} + Q\frac{dz}{dx} + Rz \tag{175}$$

pour base de nos raisonnements. P, Q et R sont des fonctions de x; c une constante.

On commence pour déterminer les fonctions arbitraires que son intégrale doit contenir, lesquelles dépendant des équations

$$\frac{du^2}{dt^2} = P\frac{du^2}{dx^2}, \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dt}dt, \tag{176}$$

sont

$$\varphi[t+f(x)], \qquad \psi[t-f(x)], \tag{177}$$

si l'on fait pour abréger

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P}} = f(x). \tag{178}$$

Cela posé, on prend pour z une des valeurs comprises dans l'expression générale

$$z = \int_a^b \Psi_1(\theta, x, t)\,\varphi[f_1(x, t, \theta)]\,d\theta + \int_a^b \Psi_2(\theta, x, t)\,\psi[f_2(x, t, \theta)]\,d\theta \tag{179}$$

où a et b sont deux constantes; $f_1(x, t, \theta)$ et $f_2(x, t, \theta)$ des fonctions telles que l'on ait

$$f_1(x, t, a) = f_2(x, t, a) = t \pm f(x), \qquad f_1(x, t, b) = f_2(x, t, b) = t \mp f(x); \tag{180}$$

et Ψ_1, Ψ_2 deux fonctions à déterminer.

Dans l'exemple que nous prenons il est facile de voir que l'on peut supposer Ψ_1 et Ψ_2 indépendents de t; et si l'on suppose les fonctions f_1 et f_2 égales entre elles et égales à

$$t + \theta f(x), \tag{181}$$

on devra donner à a et b les valeurs -1 et $+1$ et on aura

$$z = \int_{-1}^{+1} X\varphi[t+\theta f(x)]\,d\theta + \int_{-1}^{+1} Y\psi[t+\theta f(x)]\,d\theta, \tag{182}$$

X et Y etant des fonctions de x et θ.

Maintenant substituant cette valeur de z dans l'équation (175), on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1}\left[RX + Q\frac{dX}{dx} + P\frac{d^2X}{dx^2}\right]\varphi[t + \theta f(x)]\,d\theta \\
&+\int_{-1}^{+1}\left[[Qf'(x) + Pf''(x)]\,\theta X - aX + 2Pf'(x)\frac{dX}{dx}\right]\varphi'[t + \theta f(x)]\,d\theta \\
&+\int_{-1}^{+1}[Pf'(x)^2\theta^2 - 1]\,X\varphi''[t + \theta f(x)]\,d\theta = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (183)$$

pour l'équation qui doit déterminer X.

L'intégration par parties transforme cette équation en

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{f'(x)}\left[[Qf'(x) + Pf''(x)]\,\theta X - aX + 2Pf'(x)\frac{dX}{dx}\theta\right] - \frac{1}{f'(x)^2}\frac{d\cdot(\theta^2-1)X}{d\theta}\right\}\varphi[t + \theta f(x)] \\
&\qquad + \frac{(\theta^2-1)X}{f'(x)}\varphi'[t + \theta f(x)] \\
&+\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1}{f'(x)^2}\frac{d^2\cdot(\theta^2-1)X}{d\theta^2} - \frac{1}{f'(x)}\frac{d\cdot\left([Qf'(x) + Pf''(x)]\,\theta X - aX + 2Pf'(x)\frac{dX}{dx}\theta\right)}{d\theta}\right]\varphi[t + \theta f(x)]\,d\theta \\
&+\int_{-1}^{+1}\left[RX + Q\frac{dX}{dx} + P\frac{d^2X}{dx^2}\right]\varphi[t + \theta f(x)]\,d\theta = 0
\end{aligned}\right\} \quad (184)$$

faisant attention à ce que d'après l'équation (178) le produit $Pf'(x)^2$ est égal à l'unité.

Si l'on détermine maintenant X par l'équation

$$\frac{d^2\cdot(\theta^2-1)X}{d\theta^2} + f'(x)^2\left(P\frac{d^2X}{dx^2} + Q\frac{dX}{dx} + RX\right) - f'(x)\frac{d\cdot\left[[Qf'(x) + Pf''(x)]\,\theta X - aX + 2Pf'(x)\frac{dX}{dx}\theta\right]}{d\theta} = 0, \quad (185)$$

il n'y aura plus qu'à satisfaire aux équations

$$\left.\begin{aligned}
&[Qf'(x) + Pf''(x)]\,\theta X - aX + 2Pf'(x)\frac{dX}{dx}\theta - \frac{1}{f'(x)}\frac{d\theta}{d\cdot(\theta^2-1)X} = 0, \\
&(\theta^2-1)X = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (186)$$

pour $\theta = -1$ et pour $\theta = 1$.

La dernière de ces équations se trouve satisfaite d'elle-même, ce qui tient à ce que l'on a mis dans les fonctions arbitraires les quantités qui doivent y entrer.

Si l'on a l'intégrale générale de l'équation du second ordre (185) renfermant deux fonctions arbitraires, on pourra toujours à leur moyen satisfaire à la première des équations (186), et comme elle n'en déterminera qu'une seule, on donnera à l'autre deux valeurs quelconques à volonté pour avoir deux valeurs différentes pour X, lesquelles mises à la place de X et Y dans l'équation (182) conduiront à l'intégrale générale de la proposée. Généralement pourtant on n'aura pas besoin d'intégrer complètement l'équation (185), mais simplement de trouver une valeur qui la satisfasse. Un petit nombre de constantes que cette valeur renfermera sera suffisant pour vérifier l'équation aux limites.

Si au lieu de l'équation (175) on avait à intégrer une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre, on trouverait pour déterminer X une équation de l'ordre n. La supposant intégrée et X déterminé en fonction des variables indépendantes de la proposée et de θ, on disposerait des n fonctions arbitraires que son expression

doit contenir pour satisfaire aux $n-1$ équations aux limites qui se présentent dans ce cas. Ces équations aux limites ne déterminant tout au plus que $n-1$ il restera une fonction à laquelle on donnera n formes arbitraires, et prenant après les n valeurs qui en résulteront pour X on formera l'intégrale générale de la proposée.

Au lieu d'avoir transformé l'équation (183) dans une autre de la forme

$$\left[F_1(x,\theta)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} f_1(x,\theta)\,\varphi[t+\theta f(x)]\,d\theta = 0, \tag{187}$$

on aurait pu, par le même procédé, la mettre sous cette autre forme

$$\left[F_2(x,\theta)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} f_2(x,\theta)\,\varphi''[t+\theta f(x)]\,d\theta = 0; \tag{188}$$

ce qui aurait conduit à d'autres équations que celles qu'on a trouvées par déterminer X.

D'après la méthode que l'on vient d'exposer, on peut obtenir très-facilement les fonctions primitives de la plupart des équations aux différentielles partielles que l'on a intégrées jusqu'à ce jour. Mais ce qui rend surtout la méthode précédente hautement recommandable, c'est que quand on ne peut pas intégrer les équations auxiliaires auxquelles on arrive pour déterminer X, on a du moins déterminé en partie la forme que cette intégrale doit avoir; or cela, ainsi que nous le montrerons dans la suite de ce Mémoire, est décisif dans la solution d'une foule de problèmes de Mécanique et de Physique.

XV.

Le théorème sur la composition des fonctions arbitraires n'est pas moins utile quand il s'agit d'intégrer des équations à plus de trois variables.

Supposons, en effet, que l'on veut intégrer l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dx^2} + S\frac{d^2\varphi}{dy^2} + T\frac{d^2\varphi}{dz^2} + Q\frac{dx}{dx} + P\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dz} + Mz = 0. \tag{189}$$

On commence par déterminer ses fonctions arbitraires, lesquelles dépendent, comme on sait, de l'équation

$$\frac{du^2}{dt^2} = R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du^2}{dy^2} + T\frac{du^2}{dz^2}. \tag{190}$$

Quand il s'agissait des équations à trois variables, l'équation qui déterminait u était très-facile à traiter; mais ici la question se complique de beaucoup, l'intégration de cette équation en u étant très-difficile quand R, S et T sont des fonctions de toutes les variables indépendantes ou de quelques unes seulement. Cependant cet accroissement de difficultés tient plutôt à la nature des choses qu'à la méthode elle-même, car on sait que la difficulté d'intégrer les équations aux différentielles partielles croit dans une proportion très-rapide avec le nombre des variables.

Si l'on trouve que l'intégration de cette équation soit très-difficile on peut suivre une autre marche, souvent préférable. Comme les équations du second ordre, composées de la même manière relativement aux termes du même ordre, ont les mêmes fonctions arbitraires, il s'en suit qu'en prenant l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dx^2} + S\frac{d^2\varphi}{dy^2} + T\frac{d^2\varphi}{dz^2} + Q_1\frac{d\varphi}{dx} + P_1\frac{d\varphi}{dy} + N_1\frac{d\varphi}{dz} + M_1\varphi = 0, \quad (191)$$

s'il est possible de l'intégrer en disposant arbitrairement des fonctions Q_1, P_1, N_1 et M_1, on aura tout de suite les fonctions arbitraires de la proposée.

Ces fonctions seront données généralement au moyen des intégrales définies. En représentant une par

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2)\,\psi\,[f_1(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2), f_2(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2), f_3(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2)]\,d\theta_1\,d\theta_2, \quad (192)$$

l'intégrale de la proposée, ou de tout autre équation qui aura les mêmes termes du second ordre, sera de la forme

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} X\psi\,[{}_1f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_1), {}_2f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_2), {}_3f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_3)]\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3, \quad (193)$$

${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$, étant les caractéristiques de trois fonctions telles que

$$\left.\begin{aligned} {}_1f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_1) &= f_1(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2) \quad \text{pour} \quad \omega_1 = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \omega_1 = \beta_1, \\ {}_2f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_2) &= f_2(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2) \quad \text{pour} \quad \omega_2 = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \beta_2, \\ {}_3f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_3) &= f_3(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2) \quad \text{pour} \quad \omega_3 = \alpha_3 \quad \text{et} \quad \omega_3 = \beta_3; \end{aligned}\right\} \quad (194)$$

et X une fonction des variables x, y, z, t, θ_1, θ_2, ω_1, ω_2, ω_3, dont la nature dépend des coefficients de la proposée.

Disons maintenant en peu de mots comme on peut déterminer la fonction X, mais pour ne pas particulariser nos raisonnements supposons qu'il s'agit au lieu de l'équation (189), d'une équation quelconque à quatre variables indépendantes; mais d'un ordre quelconque. Désignons cette équation, que nous supposerons linéaire, par

$$F\left(x, y, z, t, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \text{etc., etc.}\right) = 0; \quad (195)$$

et admettons que l'on ait déterminé ses fonctions arbitraires et que l'expression (192) en soit une. Convenons d'ailleurs de désigner par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^{m+n+p}_{m,n,p}\cdot\psi({}_1f, {}_2f, {}_3f)}{dx^{m_1}\,dy^{n_1}\,dz^{p_1}\,dt^{q_1}\,dx^{m_2}\,dy^{n_2}\,dz^{p_2}\,dt^{q_2}\,dx^{m_3}\,dy^{n_3}\,dz^{p_3}\,dt^{q_3}}, \\ &m_1 + n_1 + p_1 + q_1 = m, \quad m_2 + n_2 + p_2 + q_2 = n, \quad m_3 + n_3 + p_3 + q_3 = p, \end{aligned}\right\} \quad (196)$$

la dérivée de la fonction $\psi({}_1f, {}_2f, {}_3f)$ prise m fois en faisant varier ${}_1f$, n fois en faisant varier ${}_2f$ et p fois par rapport à ${}_3f$; et substituons dans cette équation la valeur (193) de φ donnée plus haut. On arrivera à une équation renfermant sous les signes d'intégration définie la fonction $\psi({}_1f, {}_2f, {}_3f)$ ainsi que ses dérivées par rapport aux variables x, y, z et t prises en faisant varier alternativement les trois fonctions ${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$.

Maintenant il est facile de voir que l'on peut transformer toutes les différentiations par rapport aux variables x, y, z, t en dérivées relatives aux nouvelles variables ω_1, ω_2, ω_3.

L'intégration par parties fera après disparaitre de dessous le signe d'intégration toutes ces dérivées, et on arrivera à une équation de la forme

$$\Xi + \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} X_1\psi\,[{}_1f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_1), {}_2f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_2), {}_3f(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \omega_3)]\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3\,d\theta_1\,d\theta_2 = 0 \quad (197)$$

Ξ étant une fonction des variables indépendantes de la proposée et de ω_1, ω_2, ω_3; ces variables y devant être respectivement prises dans les limites α_1 et β_1, α_2 et β_2, α_3 et β_3.

Pour satisfaire à cette équation, on fera

$$X_1 = 0. \tag{198}$$

C'est cette équation qui doit déterminer X, et l'ayant déterminé il ne restera qu'à satisfaire aux équations aux limites

$$\Xi = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \omega_1 = \alpha_1, \\ \omega_2 = \alpha_2, \\ \omega_3 = \alpha_3, \end{cases} \tag{196}, \qquad \Xi = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \omega_1 = \beta_1, \\ \omega_2 = \beta_2, \\ \omega_3 = \beta_3; \end{cases} \tag{199}$$

chose à laquelle on peut toujours arriver à l'aide des fonctions ou constantes arbitraires que l'expression de X doit renfermer.

XVI.

Il est souvent possible de mettre l'expression précédente de z sous une forme plus simple en faisant $\omega_2 = \omega_2 = \omega_1$: elle se réduira alors à une intégrale simple.

Supposons en effet que l'on veut intégrer l'équation (25). Ses fonctions arbitraires étant les mêmes que celles de l'équation (24), une de ses intégrales particulières, d'après l'intégrale générale (26) de cette équation, peut être mise sous la forme

$$\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} X\varphi(x\cos\lambda + at\cos u, y\cos\mu + at\sin u\sin v, z\cos\nu + at\sin u\cos v)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv, \tag{200}$$

X étant une fonction de x, y, z, t et des variables λ, μ, ν, u, v dépendante des coefficients de la proposée.

Mettant cette valeur de φ dans l'équation proposée et suivant pour déterminer X la méthode que nous venons de tracer, on verra qu'il est possible de faire $\lambda = 0$ et $\mu = 0$; et poursuivant le calcul on trouvera pour φ la première intégrale du second membre de l'équation (27). D'après la forme de l'équation (25) il est aisé de prouver que la dérivée de cette fonction par rapport à t est une autre intégrale particulière de la même équation.

Je ne développe pas les calculs parce qu'ils sont longs et n'offrent pas la moindre difficulté; mais vais indiquer un moyen plus expéditif de trouver l'intégrale de cette équation, qui se présente dans les applications de l'Analyse à Physique mathématique.

Pour cela posons

$$\varphi = e^{amt + nx + py} Z : \tag{201}$$

m, n et p étant des constantes; Z une fonction de z et des mêmes constantes. Substituant cette valeur dans la proposée, on en déduira

$$a^2 z^2 \frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha z \frac{dZ}{dz} + [\beta + a^2(-m^2 + n^2 + p^2) z^2]\, Z = 0; \tag{202}$$

ou

$$z^2 \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\alpha}{a^2} z \frac{dZ}{dz} + \left(\frac{\beta}{a^2} - \rho^2 z^2\right) Z = 0, \tag{203}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$m^2 - n^2 - p^2 = \rho^2. \tag{204}$$

Faisons maintenant

$$Z = z^{\delta} u; \tag{205}$$

et déterminons δ par l'égalité

$$\delta(\delta - 1) + \frac{\alpha}{a^2}\delta + \frac{\beta}{a^2} = 0; \tag{206}$$

il s'en suivra

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + 2k\frac{du}{dz} - \rho^2 z u = 0, \tag{207}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$2k = 2\delta + \frac{\alpha}{a^2}. \tag{208}$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons, d'après la méthode élégante donnée par Laplace dans la Théorie analytique des Probabilités,

$$u = \int e^{-z\theta}\psi(\theta)\, d\theta; \tag{209}$$

on en déduira

$$-\int \frac{d \cdot e^{-z\theta}}{d\theta}(\theta^2 - \rho^2)\psi(\theta)\, d\theta - 2k\int e^{-z\theta}\psi(\theta)\, d\theta = 0. \tag{210}$$

L'intégration par parties transforme cette en équation en celle-ci

$$-e^{-z\theta}(\theta^2 - \rho^2)\psi(\theta) + \int e^{-z\theta}\left[\frac{d \cdot (\theta^2 - \rho^2)\psi(\theta)}{d\theta} - 2k\theta\psi(\theta)\right] d\theta = 0, \tag{211}$$

la partie débarrassée du signe d'intégration devant être prise entre les limites de l'intégrale.

Déterminant $\psi(\theta)$ par l'équation

$$\frac{d \cdot (\theta^2 - \rho^2)\psi(\theta)}{d\theta} - 2k\theta\psi(\theta) = 0; \tag{212}$$

d'où l'on tire

$$\psi(\theta) = C(\theta^2 - \rho^2)^{k-1}, \tag{213}$$

C étant une constante arbitraire, il ne reste qu'à déterminer les limites de l'intégrale pour la condition que l'équation

$$e^{-z\theta}(\theta^2 - \rho^2)\psi(\theta) = Ce^{-z\theta}(\theta^2 - \rho^2)^k = 0, \tag{214}$$

ait lieu pour ces valeurs extrêmes de θ. Or, on satisfait à cette équation en prenant pour ces limites $-\rho$ et $+\rho$ pourvu que k soit positif; ou de la forme $m \pm p\sqrt{-1}$. On aura alors

$$u = C\int_{-\rho}^{\rho} e^{-z\theta}(\theta^2 - \rho^2)^{k-1}\, d\theta; \tag{215}$$

ou

$$u = C\int_0^{\pi} e^{\rho z\cos\omega}\sin^{2k-1}\omega\, d\omega, \tag{216}$$

si l'on pose $\theta = -\rho\cos\omega$ et on prend une autre constante.

L'équation (206) donnant deux valeurs pour δ, on déduira de l'équation (208) deux aussi pour k. En les substituant dans cette expression de u, on aura les deux intégrales particulières que comporte l'équation du second ordre (207).

Cela suppose, bien entendu, que k soit positif ou bien imaginaire et de la forme $m \pm p\sqrt{-1}$, m étant une nombre positif. Ou ce qui importe de remarquer c'est que une des deux valeurs de k au moins satisfera toujours à cette condition, car la somme des deux racines de l'équation (206) étant égale à $1 - \frac{\alpha}{a^2}$, la somme des deux valeurs de k sera toujours égale à l'unité, ce qui suppose né-

cessairement qu'une des deux valeurs de k soit de la forme $m \pm p\sqrt{-1}$. Alors l'expression trouvée ci-dessus pour u sera toujours une intégrale de l'équation (207), et cela aura lieu quelque soit les suppositions que l'on fasse sur les coefficients de la proposée, qu'ils soients réels ou imaginaires.

Portant donc cette valeur de u dans l'équation (205), et la valeur correspondante de Z dans l'égalité (204), on aura

$$\varphi = Ce^{mat+nx+py}\int_0^\pi e^{\rho z\cos\omega} z^\delta \sin^{2k-1}\omega\, d\omega \tag{217}$$

pour une des intégrales de l'équation (25).

Tirant de l'équation (204) la valeur de m en fonction de ρ et faisant attention à ce que le radical peut être pris soit avec le signe positif soit avec le signe négatif, la fonction

$$\varphi = Ce^{nx+py} z^\delta \int_0^\pi e^{\rho z\cos\omega} \sin^{2k-1}\omega\, d\omega\, (e^{-at\sqrt{n^2+p^2+\rho^2}} - e^{+at\sqrt{n^2+p^2+\rho^2}}) \tag{218}$$

satisfera encore à la même équation.

Il est aisé de voir que cette expression de φ peut être mise sous la forme

$$\varphi = C\int_0^\pi\int_0^\pi z^\delta e^{at\sqrt{n^2+p^2+\rho^2}\cos\chi + nx+py+z\rho\cos\omega} t\sin\chi\sin^{2k-1}\omega\, d\omega\, d\chi, \tag{219}$$

qui se transforme encore en

$$\varphi = C\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi} z^\delta e^{n(x+at\cos u)+p(y+at\sin u\sin v)+\rho(z\cos u+at\sin u\cos v)} t\sin u\sin^{2k-1}\omega\, d\omega\, du\, dv, \tag{220}$$

en vertu du beau théorème

$$2\pi\int_0^\pi \varphi(\sqrt{y^2+b^2+k^2}\cos\omega)\, d\omega = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varphi(y\cos u + h\sin u\sin v + k\sin u\cos v)\sin u\, du\, dv \tag{221}$$

du à Poisson.

Donnant aux constantes n, p, ρ et C qui sont restées arbitraires toutes les valeurs possibles et sommant les différentes expressions qui en résulteront on aura l'intégrale générale de l'équation (25). Mais la suite

$$\Sigma\, Ce^{n(x+at\cos u)} e^{p(y+at\sin u\sin v)} e^{\rho(z\cos\omega+at\sin u\cos v)}, \tag{222}$$

où le signe sommatoire s'étend à toutes les valeurs possibles de constants n, p, ρ et C étant équivalente à une fonction arbitraire des trois quantités

$$x + at\cos u, \qquad y + at\sin u\sin v, \qquad z\cos\omega + at\sin u\cos v, \tag{223}$$

on trouvera

$$\varphi = z^\delta\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\psi(x+at\cos u,\ y+at\sin u\sin v,\ z\cos\omega+at\sin u\sin v)\sin^{2k-1}\omega\sin u\, d\omega\, du\, dv. \tag{224}$$

Faisant attention maintenant à ce que, d'après la forme de l'équation proposée, s'il existe une fonction X qui la satisfasse sa dérivée par rapport à t la satisfaira également, on formera de suite l'intégrale générale de cette équation que nous avons donnée à la page 98 de ce Recueil.

XVII.

Il arrive souvent en intégrant des équations aux différentielles partielles qu'on arrive à des intégrales à formes si compliquées qu'il est impossible d'y lire les lois du phénomène que l'on veut analyser. Cette complication ne provient pas autant des nombreuses intégrations définies que ces expressions renferment que de ce que leurs limites sont généralement infinies. Or notre théorème a l'avantage de réduire ces limites à des nombres finis μ_1, $_1\mu$, μ_2, $_2\mu$, etc. en faisant voir que les intégrales sont nulles toutes les fois que les variables θ_1, θ_2, etc. relativement auxquelles les intégrations définies sont prises tombent respectivement en dehors des nombres constants μ_1, μ, μ_2, $_2\mu$, etc.

Pour le faire voir soit l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = X_1 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Y_1 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + Z_1 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + V; \tag{225}$$

où V est une fonction des variables indépendantes, de φ et ses dérivées du premier ordre par rapport à ces variables; X_1, Y_1, Z_1 des fonctions de x, y et z seulement. Supposons que l'on ait trouvé l'intégrale de cette équation et que cette intégrale soit

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)\, \psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\, d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3, d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$$
$$+ \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)\, \Psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\, d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3, d\omega_1, d\omega_2, d\omega_1. \tag{226}$$

Admettons encore que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = X_1 \frac{d_1\varphi}{dx_2} + Y_1 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + Z_1 \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \tag{227}$$

ou bien de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = X_1 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Y_1 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + Z_1 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + V', \tag{228}$$

où V' est une fonction linéaire de φ et ses dérivées, soit connue et que cette intégrale soit

$$\varphi = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F_1(x,y,z,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, \psi[t+\xi_1 f_1(x,y,z), t+\xi_2 f_2(x,y,z), t+\xi_3 f_3(x,y,z)]\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$
$$+ \frac{d}{dt}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F_1(x,y,z,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, \psi[t+\zeta_1 f_1(x,y,z), t+\xi_2 f_2(x,y,z), t+\xi_3 f_3(x,y,z)]\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \tag{229}$$

Maintenant les équations (222), (227) et (228), composées de la même manière relativement aux termes du second ordre, devant avoir les mêmes fonctions arbitraires, il faut nécessairement qu'en posant

$$\theta_1 = t + \xi_1 f_1(x, y, z), \qquad \theta_2 = t + \xi_2 f_2(x, y, z), \qquad \theta_3 = t + \xi_3 f_3(x, y, z), \tag{230}$$

les limites relatives aux nouvelles variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, au lieu d'être $-\infty$ et $+\infty$, comme on serait porté à le croire, se réduisent tout simplement à -1 et $+1$, afin que les expressions (225) et (228) puissent avoir les mêmes fonctions arbitraires.

De cette manière l'intégrale de l'équation (225), si l'on désigne par $F_2(x, y, z, t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ce que devient F quand on y met au lieu de θ_1, θ_2, θ_3 leurs valeurs, et si l'on fait pour abréger

$$f_1(x, y, z)\, f_2(x, y, z)\, f_3(x, y, z) = {}_1f(x, y, z), \tag{231}$$

devenant

$$\varphi = {}_1f(x,y,z)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F_2(x,y,z,t,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\omega_1,\omega_2,\omega_3)\ \psi[t+\xi_1 f_1(x,y,z), t + \xi_2 f_2(x,y,z), t+\xi_3 f_3(x,y,z)]\ d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$
$$+ {}_1f(x,y,z)\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F_2(x,y,z,t,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\omega_1,\omega_2,\omega_3)\ \psi[t+\xi_1 f_1(x,y,z), t + \xi_2 f_2(x,y,z), t+\xi_3 f_3(x,y,z)]\ d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \quad (232)$$

malgré les nombreuses intégrations définies qu'elle renferme, se prêtera bien facilement à l'examen des phénomènes que l'on veut analyser.

XVIII.

La transformation que l'on vient d'exécuter suppose que les limites des intégrales relatives aux variables θ_1, θ_2, θ_3 au lieu $-\infty$ et $+\infty$ soients respectivement

$$t \pm f_1(x,y,z) \qquad t \pm f_2(x,y,z) \qquad t \pm f_3(x,y,z). \quad (233)$$

Or il peut paraître de prime abord singulier que l'intégrale du second membre de l'équation (226) qui satisfait à l'équation (225) lorsqu'on la prend pour désigner φ et qu'on la différentie dans la supposition d'être les limites constantes, la vérifie encore quand ces limites déviennent des fonctions des variables indépendantes.

Pour faire mieux voir à quoi cela tient, prenons pour exemple l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}. \quad (234)$$

On la vérifie en prenant pour u l'expression

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha at\cos\alpha(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha at}{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\alpha \quad (235)$$

qui a toute la généralité désirable, car en y faisant $t=0$, ainsi que dans sa dérivée par rapport à t, on pourra satisfaire aux

$$u = f(x), \qquad \frac{du}{dt} = F(x) \quad (236)$$

quelques soient les valeurs que prennent alors u et $\frac{du}{dt}$, au moyen des deux fonctions arbitraires $f(x)$ et $F(x)$.

De l'autre coté on sait que l'intégrale de la même équation (234), connue depuis long-temps, est

$$u = \psi(x+at) + \Psi(x-at). \quad (237)$$

Alors, d'après les considérations que nous avons développées plus haut, il faut qu'en posant

$$\xi = x + \omega at, \quad (238)$$

la première de ces valeurs de u se réduise à

$$u = \frac{at}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\cos\alpha at\cos\alpha\omega at\, f(x+\omega at)\, d\alpha\, d\omega$$
$$+\frac{at}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha at}{\alpha}\cos\alpha\omega at\, F(x+\omega at)\, d\alpha\, d\omega \qquad (239)$$

afin qu'elle ait les mêmes fonctions arbitraires que la seconde.

Il est aisé de vérifier ce résultat. Pour cela, je remarque que la seconde partie de la valeur de u pouvant être mise sous la forme

$$\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin\alpha(x+at-\xi)}{\alpha}-\frac{\sin\alpha(x-at-\xi)}{\alpha}\right]F(\xi)\, d\xi\, d\alpha, \qquad (240)$$

et l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin\alpha(x+at-\xi)}{\alpha}-\frac{\sin\alpha(x-at-\xi)}{\alpha}\right]d\alpha \qquad (241)$$

se réduisant à zéro pour des valeurs de ξ qui tombent hors des limites $\xi = x-at$, $\xi = x+at$. en désignant par ε une quantité infiniment petite, il est inutile de donner à la variable ξ dans cette partie de la valeur de u des limites plus éloignées l'une de l'autre que

$$(1+\varepsilon)(x+at), \qquad (1-\varepsilon)(x-at); \qquad (242)$$

la quantité ε devant être prise positivement si $x+at > x-at$, et négativement dans le cas contraire.

La première partie de la valeur de u peut aussi être mise sous la forme

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\cos\alpha(x+at-\xi)+\cos\alpha(x-at-\xi)\, f(\xi)\, d\xi\, d\alpha \qquad (243)$$

Mais on sait, d'après le théorème de Fourier, que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha(x+at-\xi)\, f(\xi)\, d\xi\, d\alpha, \qquad (244)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha(x-at-\xi)\, f(\xi)\, d\xi\, d\alpha, \qquad (245)$$

n'ont pas de valeurs, la première qui pour des valeurs de ξ qui diffèrent infiniment peu en plus et en moins de $x+at$, la seconde que pour ceux qui correspondent à l'élément $\xi = x-at$, et à ceux qui s'en approchent indéfiniment.

Il en résulte qu'on peut supposer dans l'intégrale (243) que la variable ξ ne tombe jamais en dehors des limites $x-at$, $x+at$: et de cette analyse on en conclut aussi, qu'en désignant comme ci-dessus par ε une quantité infiniment petite, la valeur de u, donnée par l'équation (235) pourra être mise sous la forme

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(1-\varepsilon)(x+at)}^{(1+\varepsilon)(x+at)}\cos\alpha at\cos\alpha(x-\xi)\, f(\xi)\, d\alpha\, d\xi$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(1-\varepsilon)(x-at)}^{(1+\varepsilon)(x+at)}\frac{\sin\alpha at}{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)\, F(\xi)\, d\alpha\, d\xi; \qquad (246)$$

l'infiniment petit ε devant être pris positivement si $x+at > x-at$, et négativement dans le cas contraire.

Si l'on pose maintenant $\xi = x + \omega a t$, et si l'on fait converger ε indéfiniment vers zéro on tombera sur l'expression (239) que nous avons trouvée plus haut.

Le même exemple nous servira pour montrer comme il est possible qu'une intégrale qui satisfait à une équation quand ses limites sont constantes, puisse satisfaire à la même équation quand ces limites deviennent variables. C'est ainsi que non seulement la fonction

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\cos\alpha a t\cos\alpha(x-\xi)\,f(\xi)\,d\alpha\,d\xi + \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\frac{\sin\alpha a t}{\alpha}\cos\alpha a(x-\xi)\,F(\xi)\,d\alpha\,d\xi, \tag{247}$$

où μ', μ'' sont deux nombres constants, vérifie l'équation (234), mais encore l'expression

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'(x-at)}^{\mu''(x+at)}\cos\alpha a t\cos\alpha(x-\xi)\,f(\xi)\,d\alpha\,d\xi + \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'(x-at)}^{\mu''(x+at)}\frac{\sin\alpha a t}{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)\,F(\xi)\,d\alpha\,d\xi \tag{248}$$

qui n'en diffère que par ses limites, la satisfait également, quoique ces limites de constantes soient devenues variables.

Cette expression de u pouvant être mise sous la forme

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\mu''(x+at)}\cos\alpha(x-\xi)\left[\cos\alpha a t\,f(\xi) + \frac{\sin\alpha a t}{\alpha a}F(\xi)\right]d\alpha\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\mu'(x-at)}\cos\alpha(x-\xi)\left[\cos\alpha a t\,f(\xi) + \frac{\sin\alpha a t}{\alpha a}F(\xi)\right]d\alpha\,d\xi \tag{249}$$

si l'on fait dans la première intégrale $\xi = (x+at)\omega$; et dans la seconde $\xi = (x-at)$, elle deviendra

$$u = \frac{(x+at)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\mu''}\cos\alpha[x-\omega(x+at)]\left[\cos\alpha a t\,f[\omega(x+at)] + \frac{\sin\alpha a t}{\alpha a}F[\omega(x+at)]\right]d\alpha\,d\omega - \frac{(x-at)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\mu'}\cos\alpha[x-\omega(x-at)]\left[\cos\alpha a t\,f[\omega(x-at)] + \frac{\sin\alpha a t}{\alpha a}F[\omega(x-at)]\right]d\alpha\,d\omega. \tag{250}$$

Si l'on compare maintenant cette expression de u avec les valeurs particulières de la même variable

$$C\sin\alpha a t\cos\alpha(x-\xi), \qquad C_1\sin\alpha a t\cos\alpha(x-\xi), \tag{251}$$

satisfaisant à l'équation proposée et d'où on est parti pour former l'expression plus générale (234), on voit qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre que parce qu'on a pris une foule d'expressions du même genre, les constantes étant remplacées par des fonctions des quantités $x-at$ et $x+at$ qui doivent former les fonctions arbitraires de cette équation. Toute autre fonction de x et t que l'on aurait prise au lieu des limites constantes aurait conduit à des résultats fautifs.

XIX.

Dans tout ce qui précède nous avons toujours supposé que les équations dont on cherche les fonctions arbitraires renfermaient parmi les termes de l'ordre supérieur des dérivées relatives à toutes les variables indépendantes. Mais si cela n'a pas lieu, de quels termes dépendent alors les fonctions arbitraires de la proposée? Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agit de l'équation générale du second ordre et à trois variables (10); et que cette équation ne renferme parmi les termes du second ordre que le coefficient différentiel qui est relatif à x ou à y seulement.

Au lieu des variables x et y, introduisons dans cette équation deux nouvelles variables u et v, dont nous laisserons les rapports avec les premières pour le moment indéterminés. Exécutant les transformations des variables dans cette supposition et admettant, pour le moment, que l'équation proposée soit complète, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\left(R\frac{du^2}{dx^2}+S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+T\frac{du^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{du^2}\\
&+\left(2R\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+S\left[\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right]+2T\frac{du}{dy}\frac{du}{dx}\right)\frac{d^2z}{du\,dv}\\
&+\left(R\frac{dv^2}{dx^2}+S\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}+T\frac{dv^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dv^2}\\
&+\left(R\frac{d^2v}{dx^2}+S\frac{d^2u}{dx\,dy}+T\frac{d^2u}{dy^2}+P\frac{du}{dx}+Q\frac{du}{dy}\right)\frac{dz}{du}\\
&+\left(R\frac{d^2v}{dx^2}+S\frac{d^2v}{dx\,dy}+T\frac{d^2v}{dy^2}+P\frac{dv}{dx}+Q\frac{dv}{dy}\right)\frac{dz}{dv}\\
&+Nz
\end{aligned}\right\}=0. \qquad (252)$$

Supposons maintenant que $S=0$ et $T=0$; ou que la proposée soit

$$R\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}+Nz=0. \qquad (253)$$

Introduisant ces suppositions dans l'équation ci-dessus et déterminant les variables u et v par les équations

$$R\frac{d^2u}{dx^2}+Q\frac{du}{dy}=0, \quad (254) \qquad R\frac{d^2v}{dx^2}+Q\frac{dv}{dy}=0, \quad (255)$$

elle se réduisant à

$$R\frac{du^2}{dx^2}\frac{d^2z}{du^2}+2R\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\frac{d^2z}{dx\,dv}+R\frac{dv^2}{dx^2}\frac{d^2z}{dv^2}+P\frac{du}{dx}\frac{dz}{du}+P\frac{dv}{dx}\frac{dz}{dv}+Nz=0, \quad (256)$$

ses fonctions arbitraires ne dépendent que de celles de l'équation

$$\frac{du^2}{dx^2}\frac{d^2z}{du^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\frac{d^2z}{du\,dv}+\frac{dv^2}{dx^2}\frac{d^2z}{dv^2}=0. \qquad (257)$$

Mais les fonctions arbitraires de cette équation étant des fonctions de u et v, et ces deux dernières variables, d'après les équations (254) et (255), ne dépendant que des coefficients R et Q et aucunement de P et N, il s'en suit que les fonctions arbitraires d'une équation du second ordre et à deux variables indépendantes, qui renferme, parmi les termes du second ordre, les dérivées relatives à une des variables, dépendent seulement des coefficients du second ordre et de celui du premier où il se trouve la dérivée relative à la variable qui manque dans l'ordre supérieure.

Cette observation est générale et s'applique à une équation d'un ordre quelconque et d'un nombre quelconque des variables. En effet, supposons que l'on ait une équation de l'ordre n et à m variables indépendantes: admettons aussi que parmi les termes renfermant les coefficients différentiels de l'ordre n, il en marque des dérivées relatives à une ou plusieurs variables y, z, t, etc. Au lieu des variables de la proposée, prenons d'autres variables φ, ψ, Ψ, etc., et exécutons la transformation sans établir, pour le moment, aucun rapport entre elles: on aura une équation complète de l'ordre n et à m variables indépendantes; et il est facile de voir que les coefficients des termes de l'ordre n de cette équation ne dépendent que de ceux du même ordre de l'équation proposée; ceux du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre de ceux du $n^{\text{ième}}$ et $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre de la proposée; généralement que les coefficients de l'ordre $l < n$ de la transformée ne dépendent que de ceux de la proposée qui sont des ordres n, $n-1$, $\cdots$ jusqu'à l inclusivement.

Cela posé, nous pouvons, comme dans l'exemple précédent, établir m équations entre les variables indépendantes primitives et les nouvelles, en égalant à zéro certaines parties des coefficients de l'ordre $n-1$ de la transformée; ces parties ne renfermant que les coefficients de l'ordre n de la proposée et ceux de l'ordre $n-1$ qui multiplient les dérivées qui marquent dans l'ordre supérieur. Mais si les dérivées relatives aux variables y, z, t, etc. n'existent pas encore parmi les termes de l'ordre $n-1$ de la proposée, il faut, dans la transformée, descendre jusqu'aux termes de l'ordre $n-2$: généralement s'il n'y a pas de dérivées relatives à la variable y parmi les termes de l'ordre supérieur à l, il faut dans la transformée descendre jusqu'à l'ordre $l-1$, pour former de ses coefficients une des équations qui doivent lier les nouvelles variables aux anciennes: or cette équation ne dépend pas, ainsi qu'il est facile de voir, que des coefficients de la proposée qui s'étendent entre les ordre n et $l-1$ inclusivement.

De la résulte le théorème suivant.

Théorème II. Les fonctions arbitraires d'une équation différentielle de l'ordre n *et d'un nombre quelconque de variables, dans laquelle, parmi les termes de l'ordre supérieur, se trouvent des dérivées relatives à toutes les variables, ne dépendent que des coefficients de l'ordre* n. *Mais si, parmi les termes de cet ordre, il ne se trouve pas des dérivées relatives à quelques variables, ces fonctions dépendent non seulement des coefficients de l'ordre* n, *mais de ceux de l'ordre* n − 1 *où se trouvent les dérivées relatives aux variables qui manquent dans l'ordre supérieur: et si parmi les termes de cet ordre on ne les trouve pas, il faut descendre aux ordres inférieurs jusqu'à ce qu'on les rencontre.*

XX.

Il peut encore arriver que l'équation proposée soit incomplète d'une manière différente de celle que suppose le théorème précédent; or on doit toujours faire bien attention à cela, soit pour arriver à la connaissance de son intégrale, soit pour déterminer la forme générale que cette intégrale doit avoir, afin de pouvoir lire avec facilité les lois des phénomènes dont l'équation différentielle est l'expression. La forme de chaque équation suggérera dans chaque cas particulier des remarques qui leur seront spéciales: il y en a pourtant quelques unes qui s'étendent à des classes assez étendues d'équations et que je vais indiquer en peu de mots.

Supposons que dans l'équation du second ordre (1) il manque la dérivée seconde par rapport à y; l'équation (3) qui détermine ses fonctions arbitraires se réduisant alors à

$$R\frac{du^2}{dx^2} + S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} = 0, \tag{258}$$

(qui se décompose dans les deux

$$\frac{du}{dx} = 0, \qquad R\frac{du}{dx} + S\frac{du}{dy} = 0) \tag{259}$$

fait voir qu'une de ses fonctions arbitraires doit être indépendante de l'autre variable x.

Il est aussi aisé de voir que si l'on a une équation linéaire de l'ordre n et à un nombre m de variables, telle qui, parmi les termes de l'ordre n, il se rencontre toujours des dérivations par rapport à x, on peut voir, une des fonctions arbitraires de cette équation sera indépendante de cette variable. Un des cas les plus curieux est celui où l'équation différentielle de l'ordre n ne renferme qu'un seul coefficient différentiel de la forme

$$\frac{d^n \varphi}{dx\, dy\, dz\, dt \ldots\ldots}; \tag{260}$$

qui ne contient que des dérivations du premier ordre par rapport à toutes les variables.

L'équation qui détermine ses fonctions arbitraires étant

$$\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}\frac{du}{dz} \ldots\ldots = 0, \tag{261}$$

fait voir que chacune des n fonctions arbitraires est indépendante tour à tour d'une des variables de la proposée.

Reprenant les calculs on peut démontrer cela directement.

XXI.

Donnons un exemple de l'usage que l'on peut faire du théorème II dans l'intégration des équations différentielles partielles qui ne sont pas complètes relativement aux termes de l'ordre supérieur.

Soit pour exemple l'équation

$$\frac{dz}{dy} = a^2\left(\frac{d^2z}{d^2x} - \frac{mz}{x^2}\right). \tag{262}$$

Les fonctions arbitraires, d'après le théorème cité, sont les mêmes que celles de l'équation

$$\frac{dz}{dy} = a^2\frac{d^2z}{dx^2}; \tag{263}$$

mais l'intégrale de cette équation étant

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\omega\sqrt{ay})\, e^{-\omega^2} d\omega; \tag{264}$$

celle de l'équation (262) pourra toujours être mise sous la forme

$$z = \int_0^{\pi} \Theta(x, \theta)\, d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x\cos\theta + 2\omega\sqrt{ay})\, e^{-\omega^2} d\omega; \tag{265}$$

faisant attention à ce que, d'après la forme de la proposée, on peut supposer la fonction $\Theta(x, \theta)$ indépendante de y. Substituant cette valeur de z dans l'équation (262) et suivant la méthode du N° IX, on trouvera

$$\Theta(x, \theta) = x^h \sin^{2h-1}\theta ; \tag{266}$$

h étant une racine de l'équation

$$h(h-1) - m = 0. \tag{267}$$

Désignant donc par h' et h'' les deux racines de cette équation; et par φ, ψ deux caractéristiques de fonctions arbitraires, on aura

$$\left.\begin{aligned} z = {} & x^{h'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\pi} \varphi(x\cos\theta + 2\omega\sqrt{ay})\, e^{-\omega^2} \sin^{2h'-1}\theta \, d\omega \, d\theta \\ & + x^{h''} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\pi} \psi(x\cos\theta + 2\omega\sqrt{ay})\, e^{-\omega^2} \sin^{2h''-1}\theta \, d\omega \, d\theta \end{aligned}\right\} \tag{268}$$

pour l'intégrale de l'équation (262), telle que l'a trouvée Poisson, par des considération particulières et en s'appuyant sur des suites. (Voyez le Journal de l'école Polytechnique, 19ième cahier et sa Théorie de la Chaleur.)

On suppose dans cette intégrale que les racines de l'équation (267) soient de la forme $p \pm q\sqrt{-1}$, p et q étant des quantité réelles dont la première est positive.*

XXII.

Le théorème sur la composition des fonctions arbitraires est susceplible encore d'une autre généralisation que je vais indiquer. Dans tout ce qui précède les équations étaient supposées linéaires, mais si l'on remonte aux considérations qui ont servi pour le démontrer, on verra que ce théorème subsiste dans le cas où ces équations cessent d'être linéaires, pourvu qu'elles le soient encore par rapport aux termes de l'ordre le plus élévé. Ainsi si l'on considère l'équation générale du second ordre (1), en la supposant linéaire par rapport aux coefficients différentiels du second ordre, c'est-à-dire, en supposant que R, S et T soient des fonctions de x et y seulement, une des deux équations, dans la méthode de Monge, qui doivent déterminer l'intégrale de la proposée étant

$$dy - m\,dx = 0, \tag{269}$$

où m est une racine de l'équation (10), et, par conséquent, une fonction de x et y seulement, on pourra toujours intégrer cette équation et arriver aux égalités (59), que nous avons établies précédemment et qui prouvent que les fonctions arbitraires de l'équation (1) sont les mêmes que celles de l'équation (60), non seulement quand ces équations sont linéaires, mais aussi quand P, Q et N étant des fonctions quelconque de $x, y, z, \frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, R, S et T, sont des variables indépendantes seulement.

Les mêmes remarques pouvant s'appliquer à une équation d'un ordre quelconque et d'un nombre quelconque de variables, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème III. Les fonctions arbitraires d'une équation de l'ordre n *et à un nombre quelconque de variables, linéaire par rapport aux termes de l'ordre* n, *mais linéaires ou non par rapport à ceux des ordres inférieurs, ne dépendent que des termes renfermant les coefficients différentiels de l'ordre* n.

* Dans le cas où cette condition n'est pas remplie pour les deux racines (elle l'est nécessairement pour une) on peut encore, à son moyen, obtenir l'intégrale de l'équation (262). (Voyez dans ce Recueil le *Mémoire sur la détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.*)

Usage des intégrales précédentes dans la solution des problèmes de Physique mathématique.

XXIII.

Montrons maintenant l'usage qu'on peut faire, dans la solution des problèmes de Mécanique et de Physique mathématique, de la suite

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \alpha_1 \varphi(u_1) + \beta_1 \varphi'(u_1) + \gamma_1 \varphi''(u_1) + \text{etc.} \\ & + \alpha_2 \psi(u_2) + \beta_2 \psi'(u_2) + \gamma_2 \psi''(u_2) + \text{etc.} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \alpha_n \chi(u_n) + \beta_n \chi'(u_n) + \gamma_n \chi''(u_n) + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \tag{270}$$

qu'on peut regarder comme pouvant représenter l'intégrale générale d'une équation linéaire de l'ordre n et à un nombre quelconque de variables sans terme indépendant de la fonction. $\varphi, \psi, \cdots \chi$ sont n caractéristiques de fonctions arbitraires; $u_1, u_2, \cdots u_n$ les n fonctions qui doivent y entrer; α_1, β_1, etc. α_2, β_2, etc. etc. des fonctions de toutes les variables indépendantes, et dont la forme dépend des coefficients de l'équation proposée.

Le trait caractéristique de cette suite, trait qui la rend si éminemment utile dans la solution des problèmes de Physique mathématique, consiste en ce que les fonctions arbitraires de l'équation proposée ne s'y trouvent point développées. A cause de cette seule circonstance, on peut, à son moyen, résoudre une foule de problèmes difficiles de Physique mathématique, intraitables par d'autres méthodes, sans que l'on ait besoin de déterminer les coefficients α_1, β_1, etc., α_2, β_2, etc. etc. qui peuvent rester tout-à-fait inconnus, et cela, sans avoir ordinairement aucune intégration à exécuter, ou du moins des intégrations le plus souvent très-simples et ayant seulement pour but la détermination des fonctions arbitraires; ce qui conduit à des calculs bien plus simples que ceux qui étaient nécessaires pour l'intégration de la proposée.

Pour mieux voir ce que nous avons à dire, supposons qu'il s'agit d'une équation du second ordre et à deux variables indépendantes

$$F\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dt}, z, x, t\right) = 0. \tag{271}$$

La suite (270) se réduit dans ce cas à

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \alpha_1 \varphi[f_1(x,t) + f_2(x,t)] + \beta_1 \varphi'[f_1(x,t) + f_2(x,t)] + \gamma_1 \varphi''[f_1(x,t) + f_2(x,t)] + \text{etc.} \\ & + \alpha_2 \psi[f_1(x,t) - f_2(x,t)] + \beta_2 \psi'[f_1(x,t) - f_2(x,t)] + \gamma_2 \psi''[f_1(x,t) - f_2(x,t)] + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{272}$$

en désignant par

$$f_1(x,t) \pm f_2(x,t) \tag{273}$$

les deux quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires de la proposée.

Cette expression de z peut encore être mise sous la forme

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \int_{-1}^{+1} \Theta_1(x,t,\omega)\, \varphi[f_1(x,t) + \omega f_2(x,t)]\, d\omega \\ & + \int_{-1}^{+1} \Theta_2(x,t,\omega)\, \psi[f_1(x,t) + \omega f_2(x,t)]\, d\omega; \end{aligned}\right\} \tag{274}$$

Θ_1, Θ_2 étant les caractéristiques de deux fonctions dépendantes de la nature des coefficients de la proposée, et que nous n'avons pas besoin de déterminer dans les applications que nous avons à faire de cette expression de z. Dans ces applications on pourra faire usage indifféremment de l'une ou de l'autre de ces expressions de z; nous prendrons ordinairement l'intégrale en suite; mais si l'on voulait faire quelque objection à des conclusions tirées de développements en suite, on n'aurait qu'à avoir recours à l'expression de z mise sous forme finie et donnée par des intégrales définies.

XXIV.

Comme d'après les considérations où nous allons entrer, on aura très-souvent l'opportunité dans beaucoup de questions, de faire usage d'expressions de cette nature, on est tout naturellement porté à adopter une convention nouvelle pour représenter les fonctions primitives qui satisfont aux équations aux différentielles partielles, convention ayant pour but mettre seulement en évidence la composition des fonctions arbitraires, sans rien prononcer sur les autres parties de l'intégrale, soit parcequ'elles ne sont pas connues, soit parcequ'il sera inutile de les déterminer.

Pour user de l'algorythme le plus simple, si l'on désigne, comme ci-dessus, par (273) les deux fonctions arbitraires de l'équation (271), on pourra représenter par l'expression symbolique

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & P_1\,[[f_1(x,t) + f_2(x,t)]] \\ +\; & P_2\,[[f_1(x,t) - f_2(x,t)]] \end{aligned}\right\} \qquad (275)$$

la fonction (272) ou bien (274) qui vérifie l'équation proposée.

D'après cette convention, P sera une espèce de caractéristique analogue à la caractéristique f, dont on se sert en la mettant devant une variable pour désigner une fonction quelconque de cette variable; P est l'initiale du mot *primitive* comme f l'est du mot *fonction*.

Cette manière de désigner les fonctions primitives ou les intégrales des équations aux différentielles partielles ne mettant en évidence que la composition des fonctions arbitraires sera ordinairement suffisante pour qu'on puisse discuter le problème proposé. Il y a pourtant d'autres questions où on a besoin de savoir si les quantités qui se combinent avec les fonctions arbitraires sont ou non fonctions des variables indépendantes, ou fonctions de quelles variables indépendantes sont les coefficients qui multiplient ou se combinent avec les fonctions arbitraires.

Alors on pourra mettre l'expression de z sous la forme

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & P_1\,[[f_1(x,t) + f_2(x,t)]]_{x,t} \\ +\; & P_2\,[[f_1(x,t) - f_2(x,t)]]_{x,t}; \end{aligned}\right\} \qquad (276)$$

convenant de mettre à droite et un peu au-dessous des crochets les variables qui doivent se conbiner avec les fonctions arbitraires, ou qui doivent entrer dans les coefficients α_1, β_1, etc., α_2, β_2, etc. de la suite (272) du N° précédent. Lorsqu'il n'y aura qu'une des deux variables, x par exemple, on écrit seulement x à droite, dehors et un peu au-dessous des crochets: si les coefficients sont constants, z se réduira alors à la forme (275).

Nous admettons encore que l'on ait

$$P\,[[0]] = 0; \qquad (277)$$

et, par conséquent, si l'équation proposée avait un second membre, on devrait ajouter à l'expression ci-dessus de z un terme propre à vérifier l'équation proposée avec son second membre.

Cette notation me semble devoir être ordinairement employée puisqu'elle est très-expeditive, d'un usage facile, et en épargnant beaucoup d'écriture, ne fait voir d'une intégrale que les parties qu'on est parvenu à déterminer ou dont on a bésoin pour la solution du problème que l'on veut analyser. Pourtant pour ne pas compliquer nos résultats avec cette espèce d'étrangeté qui accompagne toujours une notation nouvelle, nous n'en ferons point usage dans ce Mémoire.

XXV.

Nous supposerons dans tout ce qui suit qu'il s'agit de problèmes de Mécanique et de Physique; que t représente le temps, x l'abscisse et z l'ordonnée ou la fonction qu'il faut déterminer en fonction de x et t.

Problème I. Déterminer la fonction de z qui satisfait à l'équation linéaire et à deux variables

$$F\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dt}, z, x, t\right) = 0, \tag{278}$$

quelque soit x et t; et aux équations

$$z = F_1(x), \quad \frac{dz}{dt} = F_2(x), \quad \text{depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = \varepsilon \text{ quand } t = 0; \tag{279}$$

et

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad \text{depuis } \begin{cases} x = \varepsilon \text{ jusqu'à } x = +\infty \\ x = 0 \text{ jusqu'à } x = -\infty \end{cases} \text{ quand } t = 0 \tag{280}$$

équations dans lesquelles ε est une constante positive que nous supposerons très-petite; $F_1(x)$, $F_2(x)$ deux fonctions quelconques de x, continues ou discontinues, et dont les valeurs sont connues et données entre les limites 0 et ε.

Si l'on savait intégrer complètement l'équation (278) on pourrait résoudre ce problème par les procédés dont on fait usage ordinairement et auxquels je n'aurais rien à ajouter. Mais la question c'est de le résoudre quand on ne sait pas intégrer cette équation, soit à cause qu'elle est très-compliquée, soit parcequ'on veut, d'après la nature du problème, y laisser indéterminée quelques uns des coefficients de l'équation proposée (278), et, par suite, quand on doit supposer qu'on ne peut pas obtenir son intégrale. On ne déterminera pas, il est vrai, tout ce qu'on peut désirer; les valeurs numériques de z et $\frac{dz}{dt}$, par exemple, resteront inconnues, mais on arrivera à la détermination des quelques rapports qu'il y aura entre les différentes valeurs que ces quantités reçoivent, ou bien à former une équation entre les variables indépendantes, qui conduit à l'énoncé des lois principales des phénomènes que l'on veut analyser.

Pour résoudre le problème proposé on commence par déterminer les fonctions arbitraires de l'équation (278). Supposant que ces fonctions soient (273), on pourra représenter la valeur générale de z qui satisfait à cette équation par la suite (272), où α_1, β_1, etc., α_2, β_2, etc., quoique inconnues, sont pourtant des quantités déterminées d'après les coefficients de cette équation, et dont, par conséquent, nous ne pouvons aucunement disposer. Il faut maintenant disposer des formes des fonctions φ et ψ qui jusqu'ici sont restées arbitraires pour satisfaire aux autres conditions du problème.

Pour cela différentions z par rapport à t, et puis faisant dans l'une et l'autre fonction $t = 0$, on arrivera à deux équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & {}_1\alpha_1\,\varphi[f_1(x,0)+f_2(x,0)] \;+\; {}_1\beta_1\,\varphi'[f_1(x,0)+f_2(x,0)] \;+\; \text{etc.} \\ & +\; {}_1\alpha_2\,\psi[f_1(x,0)-f_2(x,0)] \;+\; {}_1\beta_2\,\psi'[f_1(x,0)-f_2(x,0)] \;+\; \text{etc.}, \end{aligned}\right\} \quad (281)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} \;=\; & {}_2\alpha_1\,\varphi[f_1(x,0)+f_2(x,0)] \;+\; {}_2\beta_1\,\varphi'[f_1(x,0)+f_2(x,0)] \;+\; \text{etc.} \\ & +\; {}_2\alpha_2\,\psi[f_1(x,0)-f_2(x,0)] \;+\; {}_2\beta_2\,\psi'[f_1(x,0)-f_2(x,0)] \;+\; \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \quad (282)$$

${}_1\alpha_1$, ${}_1\beta_1$, etc., ${}_1\alpha_2$, etc. etc., étant des fonctions déterminées de x, dépendant des coefficients α_1, β_1, etc.; α_2, etc. de la suite (272).

Cela posé, d'après les équations (280), les premiers membres de ces équations devant se réduire à zéro pour toutes les valeurs de x qui tombent en dehors des limites 0 et ε, la même chose arrivera aux seconds si l'on assujettit les fonctions φ, ψ à satisfaire aux équations

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi''(x) = \text{etc.} = 0 \quad & \text{pour} \quad x < f_1(0,0) + f_2(0,0) \\ & \text{et} \\ & \text{pour} \quad x > f_1(\varepsilon,0) + f_2(\varepsilon,0), \end{aligned}\right\} \quad (283)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) = \psi'(x) = \psi''(x) = \text{etc.} = 0 \quad & \text{pour} \quad x < f_1(0,0) - f_2(0,0) \\ & \text{et} \\ & \text{pour} \quad x > f_1(\varepsilon,0) - f_2(\varepsilon,0): \end{aligned}\right\} \quad (284)$$

et comme ces équations ne déterminent les fonctions φ et ψ qu'en dehors des limites 0 et ε, elles restent tout-à-fait arbitraires entre ces limites, et on pourra en conséquence satisfaire avec toute la généralité possible aux équations (279).

Comme il y a ici deux fonctions arbitraires cela est toujours possible, mais nous ne pouvons que montrer cette possibilité sans pousser plus loin les calculs vu que les coefficients qui multiplient les fonctions arbitraires et ses dérivées ne sont pas connus.

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & \alpha_1\,\varphi[f_1(x,t)+f_2(x,t)] \;+\; \beta_1\,\varphi'[f_1(x,t)+f_2(x,t)] \;+\; \text{etc.} \\ & +\; \alpha_2\,\psi[f_1(x,t)+f_2(x,t)] \;+\; \beta_2\,\psi'[f_1(x,t)+f_2(x,t)] \;+\; \text{etc.}, \end{aligned}\right\} \quad (285)$$

pour la fonction qui satisfait à l'équation générale (278) et aux équations (279) et (280). Dans cette équation α_1, β_1, etc., α_2, β_2, etc. sont des fonctions de x et t dépendantes des coefficients de l'équation générale; φ et ψ des fontions dépendantes, ainsi que ses dérivées, des fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$, tant qu'on n'a pas

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) \;+\; f_2(x,t) \quad & < f_1(0,0) \;+\; f_2(0,0) \\ & > f_1(\varepsilon,0) \;+\; f_2(\varepsilon,0), \end{aligned}\right\} \quad (286)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) \;-\; f_2(x,t) \quad & < f_1(0,0) \;-\; f_2(0,0) \\ & > f_1(\varepsilon,0) \;-\; f_2(\varepsilon,0), \end{aligned}\right\} \quad (287)$$

nulles dans le cas contraire.

Voyons les conséquences qu'on en déduit.

Admettons que ε soit une quantité très-petite; ce qui revient à supposer que toutes les parties du système, quand $t = 0$, étaient en repos, excepté celles qui sont comprises entre les abscisses $x = 0$ et $x = \varepsilon$.

Les fonctions de ε

$$f_1(\varepsilon,0) \;+\; f_2(\varepsilon,0), \quad (288)$$

$$f_1(\varepsilon,0) \;-\; f_2(\varepsilon,0), \quad (289)$$

seront aussi généralement très-petites, et pour peu que le temps t soit devenu un peu considérable, une des deux inégalités (286), (287) se trouvera immédiatement vérifiée, et fera évanouir une des deux suites dont se compose la valeur de z. Supposant que ce soit la première, z deviendra

$$z = \alpha_1 \psi [f_1(x,t) - f_2(x,t)] + \alpha_2 \psi' [f_1(x,t) - f_2(x,t)] + \text{etc.}; \quad (290)$$

et il n'aura pas de mouvement que pour les valeurs de x et t qui vérifient les inégalités

$$f_1(x,t) - f_2(x,t) < f_1(\varepsilon,0) - f_2(\varepsilon,0), \quad (291)$$

$$f_1(x,t) - f_2(x,t) > f_1(0,0) - f_2(0,0). \quad (292)$$

Pour un temps donné t, faisons croître la variable x depuis une certaine valeur X, intermédiaire à celles qu'elle doit avoir dans les inégalités (291), (292), pour cette valeur de t, jusqu'à la valeur de x qui vérifie l'équation

$$f_1(x_1,t) - f_2(x_1,t) = f_1(\varepsilon,0) - f_2(\varepsilon,0): \quad (293)$$

pour la même valeur de t, supposons que l'on fasse aussi décroître x depuis une valeur intermédiaire de cette variable jusqu'à celle x_0 qui vérifie l'équation

$$f_1(x_0,t) - f_2(x_0,t) = f_1(0,0) - f_2(0,0). \quad (294)$$

De ces équations on déduit

$$x_1 = {}_2f(t,\varepsilon), \quad (295)$$

$$x_0 = {}_0f(t,\varepsilon) \quad (296)$$

pour les ordonnées extrêmes des points du système qui se trouvent en mouvement. La différence

$$x_1 - x_0 = {}_1f(t,\varepsilon) - {}_0f(t,\varepsilon) \quad (297)$$

donne l'étendue de la partie du système que se trouve en mouvement dans un temps donné t; et comme les fonctions ${}_1f(t,\varepsilon)$, ${}_0f(t,\varepsilon)$ seront généralement des quantités finies, cette équation fait voir que tout le système ne se trouve pas à la fois en mouvement; mais qu'avec le temps quelques unes de ses parties qui étaient en mouvement reviennent à l'état de repos, tandis que d'autres, qui étaient en repos s'ébranlent, se mettent en mouvement, pour revenir après à l'état de quiétude. En un mot, il y a ici ce que l'on appelle dans la théorie de la propogation du mouvement une onde dont l'épaisseur $x_1 - x_0$ sera constante si t disparait de la formule précédente, mais qui sera généralement une fonction du temps dépendante de la nature des fonctions f_1 et f_2.

Si l'on différentie les équations (293) et (294), on en déduira les valeurs des coefficients $\frac{dx}{dt}, \frac{dx_0}{dt}$ qui donneront les vitesses de ses points extrêmes, et que l'on pourra désigner par

$$\frac{dx_1}{dt} = {}^1f(\varepsilon,t), \quad (298)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = {}^0f(\theta,t), \quad (299)$$

si l'on y met au lieu de x_1 et x_0 ses valeurs déduites des équations (295), (296).

Pour déterminer à présent le temps de vibration d'une molicule qui répond à l'abscisse x, faisons t croître d'une valeur T intermédiaire à celles qu'il aura dans les inégalités (291), (292) pour cette valeur de x et désignons par t_1 ce qu'il deviendra quand

$$f_1(x,t_1) - f_2(x,t_1) = f_1(\varepsilon,0) - f_2(\varepsilon,0); \quad (300)$$

et faisant après cette variable décroître à partir de la même valeur de t, savoir T, vers celui qui satisfait à l'équation

$$f_1(x,t_0) - f_2(x,t_0) = f_1(0,0) - f_2(0,0) \quad (301)$$

et que nous désignons par t_0; on en déduira

$$t_1 = {}^{(1)}f(\varepsilon,x), \quad (302)$$

$$t_0 = {}^{(0)}f(0,x), \quad (303)$$

d'où $$t_1 - t_0 = {}^{(1)}f(\varepsilon, x) - {}^{(0)}f(0, x) \tag{304}$$

pour la durée de la vibration de la molécule x; durée qui sera constante si x disparait de cette équation, mais qui, dans le cas contraire, dépendra de sa position dans le système dont elle fait partie.

Je dois observer que si des équations (293), (294) on tire plusieurs valeurs pour x_1 et x_0 on aura autant d'ondes dont ces variables feront connaître les points extrêmes et, par conséquent, leur étendue; les égalités (298), (299) les vitesses; et (304), le temps où la molécule dont l'abscisse est x sera en mouvement dans chaque onde.

Dans ces différents mouvements que nous venons d'indiquer il n'y a rien que se rapporte soit au mode primitif de vibration des molécules soit à tout autre circonstance de l'état initial.

Ainsi on voit d'après l'analyse précédente que si l'équation (278) représente un système élastique dont deux dimensions sont très petites relativement à la troisième pour qu'on ne regarde que les mouvements suivant cette direction; si l'on suppose d'ailleurs que l'élasticité varie d'une manière quelconque avec x et t; que la température varie d'une manière quelconque au long, tube, etc. et avec le temps; que les différents points du système soient sollicités par des forces accélératrices quelconques, fonctions de l'abscisse x et du temps; en un mot que touts les éléments qui peuvent entrer dans un tel système variant d'une manière quelconque, pourvu seulement que l'équation (278) ne laisse point d'être linéaire et ne renferme aucun terme indépendant de la fonction z, on voit, dis-je, d'après l'analyse que nous venons de tracer, qu'il sera toujours possible de déterminer les lois générales relatives aux mouvements d'un tel système lorsqu'on a déterminé les fonctions arbitraires de l'équation proposée, ce qui exige, d'après le théorème sur la composition des fonctions arbitraires, que l'on sache intégrer seulement une simple équation de la forme

$$dt - m\,dx = 0, \tag{305}$$

dans laquelle m désigne généralement une fonction de x et t dépendant des coefficients des termes du second ordre de l'équation proposée.

XXVI.

Dans la solution que l'on vient de tracer du problème I, on a supposé implicitement qu'on avait

$$\left.\begin{aligned} f_1(\varepsilon, 0) + f_2(\varepsilon, 0) &> f_1(0, 0) + f_2(0, 0), \\ f_1(\varepsilon, 0) - f_2(\varepsilon, 0) &> f_1(0, 0) - f_2(0, 0). \end{aligned}\right\} \tag{306}$$

On a encore supposé, qu'en désignant par h une quantité positive et infiniment petite, on a dû avoir

$$\left.\begin{aligned} f_1(x+h, 0) + f_2(x+h, 0) &> f_1(x, 0) + f_2(x, 0), \\ f_1(x+h, 0) - f_2(x+h, 0) &> f_1(x, 0) - f_2(x, 0); \end{aligned}\right\} \tag{307}$$

c'est-à-dire, qu'en posant

$$f_1(x, 0) + f_2(x, 0) = s, \tag{308}$$

$$f_1(x, 0) - f_2(x, 0) = s', \tag{309}$$

et construisant les courbes Ss, $S's'$ (fig. I), dont les ordonnées sont s et s', ces courbes auraient toujours des ordonnées croissantes pour des valeurs croissantes de x.

En effet, pour faire les seconds membres des équations (281), (282) s'évanouir pour toutes les valeurs de x qui tombent en dehors des limites $x = 0$ et $x = \varepsilon$, nous avons assujetti les fonctions arbitraires

$$\varphi(s), \qquad \psi(s'), \tag{310}$$

ainsi que ses dérivées de tous les ordres, à devenir égales à zéro, la première pour les valeurs de s qui tombent en dehors des limites

$$f_1(\varepsilon, 0) + f_2(\varepsilon, 0), \qquad f_1(0, 0) + f_2(0, 0); \tag{311}$$

et la seconde pour celles de s' qui sont respectivement plus grandes ou plus petites que

$$f_1(\varepsilon, 0) - f_2(\varepsilon, 0), \qquad f_1(0, 0) - f_2(0, 0); \tag{312}$$

et seulement pour ces valeurs.

Or, on ne pourrait pas satisfaire à ces conditions si l'on ne supposait pas que les fonctions s, s' ont les formes que nous leur avons supposées. Admettons pour un moment que le contraire puisse avoir lieu et construisons les courbes Ss, Ss' dont les ordonnées sont s, s'. Si l'on prend maintenant les ordonnées

$$s = x_1 s_1, \qquad s' = x_1 s'_1; \tag{313}$$

plus grandes respectivement que les ordonnées

$$s_0 = C s_0, \quad s'_0 = C s'_0; \qquad s_\varepsilon = \varepsilon s_\varepsilon \quad s'_\varepsilon = \varepsilon s'_\varepsilon; \tag{314}$$

correspondantes aux valeurs extrêmes de x, les fonctions $\varphi(s_1)$, $\psi(s'_1)$, ainsi que toutes leurs dérivées, se réduiront à zéro; par conséquent, les seconds membres des équations (281), (282) s'évanouiront, tandis que les premiers peuvent avoir des valeurs finies, puisque, d'après la nature du problème proposé, z et $\frac{dz}{dt}$ ne sont égaux à zéro, quand $t = 0$, que pour les valeurs de x qui tombent en dehors des limites 0 et ε, mais non pour celles, comme x_1, qui sont entre ces limites et qui peuvent avoir des valeurs quelconques.

De l'autre coté si l'on prend pour s et s' les ordonnées $x_2 s_2$, $x_2 s'_2$, correspondantes à l'abscisse $x_2 > \varepsilon$, les valeurs de ces variables étant respectivement plus petites que (311) et (312), les fonctions $\varphi(s_2)$, $\psi(s_2)$, ainsi que leurs dérivées, conserveront des valeurs finies, et, par suite, les seconds membres des équations (281), (282), tandis que les premiers doivent se réduire à zéro.

Les suppositions que nous venons de faire ne peuvent donc pas avoir lieu à moins qu'on n'admette que les inégalités (307), qui comprennent (306) comme des cas particuliers, aient lieu.

XXVII.

Pour rendre notre solution applicable à toutes les suppositions que l'on puisse faire sur les formes des fonctions s et s', en désignant par ξ une variable positive et réelle < 0 et $> \varepsilon$, on n'a qu'à supposer que les fonctions

$$\left.\begin{aligned} &\varphi[f_1(x, t) + f_2(x, t)], \\ &\psi[f_1(x, t) - f_2(x, t)], \end{aligned}\right\} \tag{315}$$

ainsi que leurs dérivées de tous les ordres se réduisent à zéro, quand les quantités qui entrent dans ces fonctions arbitraires deviennent respectivement plus grandes ou plus petites que

$$f_1(\xi, 0) + f_2(\xi, 0), \tag{316}$$

$$f_1(\xi, 0) - f_2(\xi, 0). \tag{317}$$

Il n'y aura donc mouvement que pour les valeurs de x et t qui seront comprises dans les équations

$$f_1(x,t) + f_2(x,t) = f_1(\xi,0) + f_2(\xi,0), \tag{318}$$

$$f_1(x,t) - f_2(x,t) = f_1(\xi,0) - f_2(\xi,0). \tag{319}$$

pour des valeurs croissantes du temps t une de ces équations cessera d'être vérifiée. Supposant que ce soit la première, la première suite du second membre de l'équation (285) disparaîtra de l'expression de z, et on aura seulement l'équation

$$f_1(x,t) - f_2(x,t) = f_1(\xi,0) - f_2(\xi,0), \tag{320}$$

pour déterminer les valeurs de x et t.

Cette équation remplace les deux inégalités (291). (292) et va nous donner les lois du mouvement, qui, dans le N° XXV ont été trouvées pour une forme particulière des fonctions (308) et (309).

En effet, tirant de cette équation la valeur de x on aura pour cette variable une fonction de t et ξ que je désignerai par

$$x = {}_1f(t,\xi). \tag{321}$$

Si maintenant, en supposant t constant, on fait varier ξ entre les limites 0 et ε, pour déterminer, la valeur la plus grande et la plus petite que l'on peut avoir pour x, et si l'on désigne ces valeurs par x_1 et x_0, par ξ_1, ξ_0 les valeurs correspondantes de ξ, il est évident que l'on aura

$$x_1 - x_0 = f_1(t,\xi_1) - f_1(t,\xi_0), \tag{322}$$

pour indiquer l'étendue du système qui se trouve en mouvement pendant le temps t, ou l'épaisseur de l'onde qui répond au temps t.

On aura aussi les équations

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1'(t,\xi_1), \tag{323}$$

$$\frac{dx_0}{dt} = f_1'(t,\xi_0), \tag{324}$$

pour exprimer les vitesses des points extrêmes de l'onde ou des ondes, si l'équation (320) fournit plusieurs valeurs pour x.

Cette égalité, résolue par rapport à t, conduit à l'expression de la durée de vibration de la molécule x; car, ayant premièrement trouvé

$$t = {}_2f(x,\xi), \tag{325}$$

on n'a, en traitant x comme une constante, qu'à déterminer les valeurs comprises entre 0 et ε que l'on doit donner à ξ pour rendre à la fonction ${}_2f(x,\xi)$ un maximum ou un minimum, et en désignant ces valeurs par t_1 et t_0, et par ${}_1\xi$, ${}_0\xi$ les valeurs correspondantes de ξ, on aura, en effet,

$$t_1 - t_0 = {}_2f(x,{}_1\xi) - {}_2f(x,{}_0\xi), \tag{326}$$

pour l'expression de la durée de la vibration de la molécule dont l'abscisse est x.

Nous avons encore introduit dans nos calculs une autre supposition, savoir, qu'à partir d'une certaine valeur de t et pour des valeurs croissantes de cette variable, la fonction

$${}_1f(x,t) + f_2(x,t) \tag{327}$$

dût être constamment plus grande que

$$f_1(\xi,0) + f_2(\xi,0); \tag{328}$$

tandis que l'équation (329) pourrait toujours avoir lieu.

Or cela n'a pas lieu pour toutes les formes que l'on peut donner à la fonction (327) et à

$$f_1(x,t) - f_2(x,t), \tag{329}$$

car on voit que pour certaines valeurs de x ou t, la fonction (327) deviendrait plus grande et plus petite que (328); et que la même chose aurait lieu pour la fonction (329) par rapport à

$$f_1(\xi, 0) - f_2(\xi, 0). \tag{330}$$

La solution du problème proposé dépendrait alors de l'équation (318) ou de l'équation (319), selon la suite de valeurs par lesquelles passeront x et t.

Donc, pour déterminer les lois du mouvement, on n'a plus qu'à poser

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, t) + f_2(x, t) &= f_1(\xi, 0) + f_2(\xi, 0) \\ f_1(x, t) - f_2(x, t) &= f_1(\xi, 0) - f_2(\xi, 0) \end{aligned}\right\} \tag{331}$$

et pour chaque valeur donnée de x ou t, déterminer la valeur maximum et minimum que ces équations fournissent pour l'autre variable, en supposant toujours la variable ξ comprise entre les limites 0 et ε. On déterminera de cette manière les points extrêmes des ondes (s'il y en a plusieurs), les vitesses de ces mêmes points, leurs distances mutuelles ou les épaisseurs des ondes et le temps de vibration de chaque molécule.

XXVIII.

On a supposé un peu plus haut qu'il était toujours possible d'avoir une fonction $\varphi(z)$, qui pour des valeurs de z plus grandes que μ'' et plus petites que μ', μ'' et μ' étant deux constantes quelconques, se réduisît à zéro ainsi que toutes ses dérivées, en restant d'ailleurs tout-à-fait arbitraire entre ces deux limites.

Cela n'offre pas la moindre difficulté, car on sait que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{r(z-\rho)\sqrt{-1}} f(\rho)\, dr\, d\rho \tag{332}$$

est constamment nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour des valeurs de z qui tombent en dehors des limites μ', μ'', tandis qu'elle est égale à $f(z)$ pour celles qui sont comprises entre les mêmes limites; on n'a donc qu'à prendre pour $\varphi(z)$ la fonction précédente, en y mettant $\varphi(\rho)$ à la place de f.

Dans l'expression (285) de z du N° XXV on doit alors remplacer les fonctions

$$\varphi^{(n)}[f_1(x, t) + f_1(x, t)], \qquad \psi^{(n)}[f_1(x, t) - f_2(x, t)], \tag{333}$$

par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{r(v-\rho)\sqrt{-1}}\, \varphi^{(n)}(\rho)\, dr\, d\rho, \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} e^{r(u-\rho)\sqrt{-1}}\, \psi^{(n)}(\rho)\, dr\, d\rho; \end{aligned}\right\} \tag{334}$$

où l'on a fait pour abréger

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, t) + f_2(x, t) &= v, & f_1(x, t) - f_2(x, t) &= u, \\ f_1(\varepsilon, 0) + f_2(\varepsilon, 0) &= \mu'', & f_1(\varepsilon, 0) - f_2(\varepsilon, 0) &= \nu'', \\ f_1(0, 0) + f_2(0, 0) &= \mu'; & f_1(0, 0) - f_2(0, 0) &= \nu'. \end{aligned}\right\} \tag{335}$$

Des transformations analogues auraient lieu si les fonctions v et u avaient d'autres formes que celles qu'on leur a supposées dans cet endroit.

XXIX.

On pourrait faire quelque objection au procédé dont on a fait usage pour déterminer les fonctions arbitraires qui entrent dans l'expression de z du N° XXV afin de satisfaire aux différentes équations de condition auxquelles, d'après la nature du problème, cette fonction est assujettie, et cela d'autant plus naturellement qu'en suivant en apparence le même raisonnement, on aurait pu arriver à des résultats fautifs, si l'on ne faisait pas attention à la composition des fonctions arbitraires et si on ne prouvait pas d'avance qu'elles ne se trouvent pas développées.

Supposons, par exemple, que l'on ait l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2} + f(x)\,z. \tag{336}$$

Ses fonctions arbitraires étant

$$\varphi(x+at), \qquad \psi(x-at); \tag{337}$$

son intégrale, d'après notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires, peut être mise sous la forme

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \alpha\varphi(x+at) + \alpha_1\varphi'(x+at) + \text{etc.}, \\ & + \beta\psi(x-at) + \beta_1\psi'(x-at) + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \tag{338}$$

α, α_1, etc.; β, β_1, etc. étant des fonctions déterminées de x et dépendantes de la nature de l'équation proposée.

Si l'on suppose maintenant que la fonction z soit celle qui entre dans le problème I, raisonnant comme précédemment, on trouverait l'équation

$$x = at + \xi \tag{339}$$

pour donner les lois du mouvement du système.

Cela posé, remplaçons dans l'équation (338) a par $a + a_1 - a_1$, et puis développons respectivement les fonctions (337) ainsi que leurs dérivées de tous les ordres suivant les puissances ascendantes de $+a,t$ et $-a,t$, on arrivera à un résultat de la forme

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \alpha\varphi[x+(a+a_1)t] + {}_1\alpha\varphi'[x+(a+a_1)t] + \text{etc.}, \\ & + \beta\psi[x-(a+a_1)t] + {}_1\beta\psi'[x-(a+a_1)t] + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \tag{340}$$

où α, ${}_1\alpha$, etc.; β, ${}_1\beta$, etc. désignent des fonctions de x et t.

Admettons maintenant que, raisonnant comme dans le N° XXV, on veuille déterminer les fonctions arbitraires qui entrent dans cette expression de z pour satisfaire aux conditions auxquelles cette variable est assujettie dans le problème proposé: on trouverait

$$x = (a+a_1)t + \xi$$

pour l'équation qui doit déterminer les lois du mouvement. Or, cette équation se trouvant en contradiction avec celle (339) que l'on avait trouvée premièrement, on pourrait craindre que les résultats auxquels nous sommes arrivés dans les pages antérieures ne soient fautifs.

Voici l'explication de ce paradoxe. Une fonction définie par une équation aux différentielles partielles n'est pas une fonction déterminée, car il y a une infinité de fonctions capables de satisfaire à cette équation. Supposant, pour fixer les idées, que cette équation soit linéaire et même qu'elle se confonde avec l'équation (336), faisant la somme de toutes les valeurs de z qui la vérifient pour en former l'expression la plus générale, cette expression renfermera nécessairement une foule de quantités arbitraires ou indéterminées. Dans l'exemple actuel, ces quantités indéterminées sont des fonctions de $(x+at)$ et de $(x-at)$.

Cela posé, si l'on veut arriver à trouver une fonction déterminée, il faut assujettir cette valeur de z à satisfaire à d'autres conditions imposées par la nature du problème; mais pour y arriver on ne peut disposer dans l'expression de z que de la forme des fonctions arbitraires, et aucunement des coefficients α, α_1, etc.; β, β_1, etc. qui ont été complètement déterminés en fonctions des coefficients de l'équation (336); du moins tant que les fonctions arbitraires ne se trouvent pas développées, car on sait que dans ce cas toutes les fonctions qui satisferont à l'équation proposée seront données par une suite de la forme (338), ne différant les unes des autres que par la nature des fonctions φ, φ', φ'', etc.; ψ, ψ', ψ'', etc. et aucunement par les quantités qui entrent dans ces fonctions ou bien par les coefficients qui les multiplient.

Lorsque nous voulons donc satisfaire aux autres conditions auxquelles z est assujetti, nous pouvons disposer librement des formes de ces fonctions, mais de ces formes seulement.

Maintenant si au lieu d'avoir pris la suite du second membre de l'équation (338) pour désigner la valeur de z, on avait pris celle que se trouve dans l'égalité (340), et on voulait disposer des fonctions

$$\varphi[x+(a+a_1)t], \qquad \psi[x-(a+a_1)t] \tag{341}$$

ainsi que de ses dérivées des divers ordres, pour satisfaire aux autres conditions du problème, on arriverait à un résultat fautif, car les fonctions arbitraires de la proposée, et, par suite, les seules fonctions qui dans l'expression de z soient à notre disposition, ne sont pas les fonctions (341), mais des fonctions (337), et ses dérivées.

XXX.

On trouverait avec une égale facilité la solution du problème que nous venons de résoudre, si au lieu d'avoir fait usage de l'intégrale en suite de l'équation (278), on voulait employer son intégrale donnée par des intégrales définies, qui peut être mise sous la forme (274); $\Theta_1(x,t,\omega)$, $\Theta_2(x,t,\omega)$ étant des fonctions de x, t et ω dépendant de la nature des coefficients de la proposée.

Supposant dans ce qui suit que les fonctions des premiers membres des inégalités (286) et (287) aient les formes qu'on leur a supposées dans le N° XXV et faisant dans cette équation, ainsi que dans sa dérivée, $t=0$, on aura

$$z=\int_{-1}^{+1}\Theta_1(x,0,\omega)\,\varphi[f_1(x,0)+\omega f_2(x,0)]\,d\omega+\int_{-1}^{+1}\Theta_2(x,0,\omega)\,\psi[f_1(x,0)+\omega f_2(x,0)]\,d\omega, \tag{342}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dt}=&\int_{-1}^{+1}{}_1\Theta_1(x,0,\omega)\,\varphi[f_1(x,0)+\omega f_2(x,0)]\,d\omega+\int_{-1}^{+1}{}_1\Theta_2(x,0,\omega)\,\psi[f_1(x,0)+\omega f_2(x,0)]\,d\omega\\&+\int_{-1}^{+1}{}_2\Theta_1(x,0,\omega)\,\varphi'[f_1(x,0)+\omega f_2(x,0)]\,d\omega+\int_{-1}^{+1}{}_2\Theta_2(x,0,\omega)\,\psi'[f_1(x,0)+\omega f_2(x,0)]\,d\omega;\end{aligned}\right\} \tag{343}$$

${}_1\Theta_1$, ${}_1\Theta_2$, ${}_2\Theta_1$, ${}_2\Theta_2$ étant quatre fonctions que l'on déduit aisément de l'intégrale (274).

Cela posé, d'après les conditions du problème, les fonctions des premiers membres de ces équations, tant que $t=0$, n'ayant des valeurs que pour des valeurs de x qui sont comprises entre les limites $x=0$ et $x=s$, on obligera les seconds membres à satisfaire à la même condition si l'on suppose que les fonctions $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ainsi que leurs dérivées seront constamment nulles pour

$$z = f_1(0,0) + \omega f_2(0,0), \qquad z = f_1(\varepsilon,0) + \omega f_2(\varepsilon,0). \tag{344}$$

On arrive facilement à l'aide de la formule de FOURIER à trouver deux fonctions qui satisfont à cette condition et qui restent d'ailleurs quelconques entre les mêmes limites; ce qui nous permet ensuite de satisfaire aux équations (279) du problème.

Ayant ainsi montré la possibilité de satisfaire, au moyen de l'intégrale (274) à toutes les conditions du problème I en déterminant convenablement les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, nous ne pousserons pas plus loin le calcul de cette détermination, mais nous passerons à la discussion du problème proposé.

Il est clair, d'après ce qui précède, que z sera nul et, par suite, qu'il n'y aura pas de mouvement que tant que les valeurs de x et t seront choisies parmi celles qui rendront

$$f_1(x,t) + \omega f_2(x,t) \tag{345}$$

intermédiaire aux constantes (344); et si l'on suppose que la seconde soit plus grande que la première (ce qu'on peut toujours admettre, car autrement on n'aurait qu'à changer les signes des quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires), il n'y aura de mouvement que pour les valeurs des variables indépendantes qui satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) + \omega f_2(x,t) &< f_1(\varepsilon,0) + \omega f_2(\varepsilon,0), \\ f_1(x,t) + \omega f_2(x,t) &> f_1(0,0) + \omega f_1(0,0). \end{aligned}\right\} \tag{346}$$

Faisant attention aux limites entre lesquelles la variable ω est prise, ces équations sont équavalentes aux deux systèmes d'équations

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) + \omega f_2(x,t) &< f_1(\varepsilon,0) + \omega f_2(\varepsilon,0), \\ f_1(x,t) + \omega f_2(x,t) &> f_1(\varepsilon,0) + \omega f_2(\varepsilon,0), \end{aligned}\right\} \tag{347}$$

la variable ω étant prise entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 1$; et

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) - \omega f_2(x,t) &< f_1(\varepsilon,0) - \omega f_2(\varepsilon,0), \\ f_1(x,t) - \omega f_2(x,t) &> f_1(0,0) - \omega f_2(0,0), \end{aligned}\right\} \tag{348}$$

pour des valeurs de ω qui s'étendent depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 1$.

La constante ε étant supposée très-petite, pour des valeurs du temps un tant soit peu grandes, la fonction (345) cessera de vérifier un de ces deux systèmes d'équations: supposant que ce soit le premier, c'est l'autre qui va nous donner la loi du mouvement relatif au problème proposé. En y faisant $\omega = 1 - \chi$; il viendra

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) - f_2(x,t) &< f_1(\varepsilon,0) - f_2(\varepsilon,0) - \chi[f_2(x,t) - f_2(\varepsilon,0)], \\ f_1(x,t) - f_2(x,t) &> f_1(0,0) - f_2(0,0) - \chi[f_2(x,t) - f_2(0,0)]; \end{aligned}\right\} \tag{349}$$

où

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,t) - f_2(x,t) &< f_1(\varepsilon,0) - f_2(\varepsilon,0), \\ f_1(x,t) - f_2(x,t) &> f_1(0,0) - f_2(0,0); \end{aligned}\right\} \tag{350}$$

si l'on suppose

$$f_2(x,t) < f_2(\varepsilon,0), \qquad f_2(x,t) > f_2(0,0); \tag{351}$$

et si l'on fait attention à ce que la variable χ est positive.

Ces équations sont les mêmes que celles nous avons trouvées plus haut.

XXXI.

Problème II. Déterminer la fonction z qui satisfait à l'équation linéaire

$$F\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dt}, z, x, t\right) = 0, \tag{352}$$

pour toutes, les valeurs de x et de t; et aux équations

$$z = F_1(x), \quad \frac{dz}{dt} = F_2(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad \text{depuis} \quad x = a \quad \text{jusqu'à} \quad x = b; \tag{353}$$

les valeurs extrêmes de x étant exclues, pour lesquelles on suppose que l'on ait

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = a \quad \text{et pour} \quad x = b, \tag{354}$$

quelque soit t.

Je supposerai que les fonctions arbitraires de l'équation (352) soient

$$\varphi[f_1(x) \pm f_2(x,t)]; \tag{355}$$

ou bien

$$\psi[f_1(x,t) \pm f_2(x)]; \tag{356}$$

mais dans l'une ou l'autre supposition j'admettrai que les quantités qui se multiplient ou se combinent avec ces fonctions soient indépendantes du temps t. Ainsi adoptant la première de ces formes, (elles reviennent à la même chose) dans l'intégrale développée en série

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \alpha_1\varphi[f_1(x) + f_2(x,t)] + \beta_1\varphi'[f_1(x) + f_2(x,t)] + \text{etc.} \\ & + \alpha_2\psi[f_1(x) - f_2(x,t)] + \beta_1\psi''[f_1(x) - f_2(x,t)] + \text{etc.}, \end{aligned}\right\} \tag{357}$$

les coefficients α_1, β_1, etc., α_2, β_2, etc. doivent être, par hypothèse, indépendants de t.

Faisant dans cette équation, ainsi que dans sa dérivée par rapport à t, $x = a$ et $x = b$, on a

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & {}_a\alpha_1\varphi[f_1(a) + f_2(a,t)] + {}_a\beta_1\varphi'[f_1(a) + f_2(a,t)] + \text{etc.} \\ & + {}_a\alpha_2\psi[f_1(a) - f_2(a,t)] + {}_a\beta_1\psi'[f_1(a) - f_2(a,t)] - \text{etc.} \\ 0 = {} & {}_a\alpha_1\varphi'[f_1(a) + f_2(a,t)] + {}_a\beta_1\varphi''[f_1(a) + f_2(a,t)] + \text{etc.} \\ & - {}_a\alpha_2\psi'[f_1(a) - f_2(a,t)] - {}_a\beta_2\psi''[f_1(a) - f_2(a,t)] - \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \tag{358}$$

et

$$\begin{aligned} 0 = {} & {}_b\alpha_1\varphi[f_1(b) + f_2(b,t)] + {}_b\beta_1\varphi'[f_1(b) + f_2(b,t)] + \text{etc.} \\ & + {}_b\alpha_2\psi[f_1(b) - f_2(b,t)] + {}_b\beta_2\psi'[f_1(b) - f_2(b,t)] - \text{etc.}, \\ 0 = {} & {}_b\alpha_1\varphi'[f_1(b) + f_2(b,t)] + {}_b\beta_1\varphi''[f_1(b) + f_2(b,t)] + \text{etc.} \\ & - {}_b\alpha_2\psi'[f_1(b) - f_2(b,t)] - {}_b\alpha_2\psi''[f_2(b) - f_2(b,t)] - \text{etc} \end{aligned}$$

désignant par

$${}_a\alpha_1, {}_a\beta_1, \text{etc.}; \quad {}_a\alpha_2, {}_a\beta_2, \text{etc.}; \quad {}_b\alpha_1, {}_b\beta_1, \text{etc.}; \quad {}_b\alpha_2, {}_b\beta_2, \text{etc.};$$

ce que deviennent respectivement les coefficients

$$\alpha_1, \beta_2, \text{etc.}; \quad \alpha_2, \beta_2, \text{etc.};$$

lorsqu'on y fait $x = a$ et $x = b$; et faisant attention à ce que, d'après les conditions du problème proposé, z et sa dérivée par rapport à t doivent être constamment nulles pour ces valeurs de x, quelque soit d'ailleurs t.

Pour satisfaire aux équations précédentes ainsi qu'aux autres conditions du problème, nous remplacerons les fonctions

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & \left(A_1\alpha_3 \sin\frac{\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)} + B_1\alpha_4 \cos\frac{\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)}\right)\sin\frac{\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} \\ + & \left(A_2\beta_3 \sin\frac{2\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)} + B_2\beta_4 \cos\frac{2\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)}\right)\sin\frac{2\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} \\ + & \left(A_3\gamma_3 \sin\frac{2\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)} + B_3\gamma_4 \cos\frac{2\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)}\right)\sin\frac{3\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} \\ + & \text{ etc.} \qquad\qquad + \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (362)$$

où α_3, β_3, γ_3, etc.; α_4, β_4, γ_4, etc. sont des fonctions de x dépendantes des coefficients (361); et

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \text{etc.};\quad R_1,\ R_2,\ R_3,\ \text{etc.} \quad (363)$$

des constantes arbitraires.

Cette transformation est toujours possible, car en faisant disparaître les produits de sinus et cosinus à l'aide des formules connues

$$\left.\begin{aligned} \sin x\cos y &= \tfrac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)], \\ \sin x\sin y &= \tfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)], \end{aligned}\right\} \quad (364)$$

et exécutant encore quelques petites simplifications, la valeur de z prendra la forme

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & {}_1A\,{}_1\alpha \sin\frac{\pi[f_1(x)+f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + {}_2A\,{}_2\alpha \sin\frac{2\pi[f_1(x)+f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + \text{etc.} \\ + & {}_1B\,{}_1\beta \sin\frac{\pi[f_1(x)-f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + {}_2B\,{}_1\beta \sin\frac{2\pi[f_1(x)-f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + \text{etc.} \\ + & {}^1A\,{}^1\alpha \cos\frac{\pi[f_1(x)+f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + {}^2A\,{}^2\alpha \cos\frac{2\pi[f_1(x)+f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + \text{etc.} \\ + & {}^1B\,{}^1\beta \cos\frac{\pi[f_1(x)-f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + {}^2B\,{}^2\beta \cos\frac{2\pi[f_1(x)-f_2(x,t)]}{f_1(b)-f_1(a)} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (365)$$

$${}_1\alpha,\ {}_2\alpha,\ \text{etc.};\quad {}_1\beta,\ {}_2\beta,\ \text{etc.};\quad {}^1\alpha,\ {}^2\alpha,\ \text{etc.};\quad {}^1\beta,\ {}^2\beta,\ \text{etc.}; \quad (366)$$

étant des fonctions de x dépendant des coefficients (361) et

$${}_1A,\ {}_2A,\ \text{etc.};\quad {}_1B,\ {}_2B,\ \text{etc.};\quad {}^1A,\ {}^2A,\ \text{etc.};\quad {}^1B,\ {}^2B,\ \text{etc.}; \quad (367)$$

des nouvelles constantes arbitraires. Ce remplacement des fonctions φ, ψ ainsi que de leurs dérivées, par des séries de sinus et cosinus est permis, pourvu que les variables soient comprises entre des limites finies, mais qui peuvent d'ailleurs être quelconques. Nous supposerons que ces limites relatives à la variable x soient a et b, et par rapport à t assez éloignées l'une de l'autre pour qu'elles puissent comprendre les valeurs les plus grandes que prendra cette variable pendant le temps où on voudra considérer le mouvement du système.

Sans exécuter cette transformation on peut montrer, en partant de l'équation (362), que cette valeur de z satisfait à toutes les conditions du problème proposé. En effet cette équation pouvant être mise sous la forme (365) et renfermant un nombre infini de constantes arbitraires, est équivalente, sous le rapport de la généralité, à l'expression (357), qui renferme deux fonctions arbitraires de la forme (355). Puis, en y faisant $x=a$ et $x=b$, z et sa dérivée par rapport à t se réduisent à zéro quelle que soit la valeur de cette dernière variable: les équations (354) se trouveront donc satisfaites: puis encore en faisant $t=0$, dans la valeur de z, ainsi que dans sa dérivée par rapport à t, et égalant les résultats respectivement à $F_1(x)$ et $F_2(x)$, on aura les équations

$$F_1(x) = B_1\alpha_4 \sin\frac{\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} + B_2\beta_4 \sin\frac{2\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} + \text{etc.}, \quad (368)$$

$$\frac{F_2(x)}{{}_2f(x)} = A_1\alpha_3 \sin\frac{\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} + A_2\beta_3 \sin\frac{2\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)} + \text{etc.}; \qquad (369)$$

à quoi on peut toujours satisfaire en déterminant convenablement les constantes (367).

On a mis dans la dernière de ces équations ${}_2f(x)$ pour désigner la valeur de la dérivée de $f_2(x)$ prise par rapport à t quand on y fait $t=0$; et on a aussi admis, pour simplifier les calculs, que l'on a,

$$f_2(x,0) = 0. \qquad (370)$$

Les équations (353) se trouveront satisfaites et l'expression de z donnée par l'équation (362) renfermera la solution complète du problème, ainsi que nous allons le faire voir.

Pour cela, en faisant, pour abréger,

$$\frac{dz}{dt} = v, \qquad \frac{d\cdot f_2(x,t)}{dt} = {}^2f(x,t)\,[f_1(b)-f_1(a)], \qquad (371)$$

et prenant la dérivée de z par rapport à t, on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{{}^2f(x,t)} = {}&\pi\left(A_1\alpha_3\cos\frac{\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)} - B_1\alpha_3\sin\frac{\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)}\right)\sin\frac{\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)}\\ &+ 2\pi\left(A_2\beta_3\cos\frac{2\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)} - B_2\beta_3\sin\frac{2\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)}\right)\sin\frac{2\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)}\\ &+ 3\pi\left(A_3\gamma_3\cos\frac{3\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)} - B_3\gamma_3\sin\frac{3\pi f_2(x,t)}{f_1(b)-f_1(a)}\right)\sin\frac{3\pi[f_1(x)-f_1(a)]}{f_1(b)-f_1(a)}\\ &+ \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.}\end{aligned}\right\} \qquad (372)$$

Faisant maintenant attention à ce que le temps n'entre dans les seconds membres des équations (362) et (372) que sous des signes de sinus et cosinus, il est évident que les fonctions

$$z, \qquad \frac{v}{{}^2f(x,t)}, \qquad (373)$$

reprendront les mêmes valeurs toutes les fois que, pour des valeurs croissantes de t, cette variable passera d'une certaine valeur t_n à une autre t_{n+1} déterminée par l'équation

$$f_2(x,t_{n+1}) = 2\,[f_1(b)-f_1(a)] + f_2(x,t_n). \qquad (374)$$

Dans les problèmes de Mécanique z désignera généralement une ordonnée ou accroisement d'ordonnée et v une vitesse ou une condensation. Or, si l'on désigne par t une valeur primitive initiale et par

$$t_1, \quad t_2, \ldots\ldots, t_n, \ldots\ldots \qquad (375)$$

les différentes valeurs que l'on déduit pour t_n de l'équation (374), il en résulte qu'au bout des intervalles de temps respectivement égaux à

$$t_1 - t, \quad t_2 - t_1, \ldots\ldots, t_{n+1} - t_n, \ldots\ldots, \qquad (376)$$

intervalles qui ne sont pas constants, mais qui varient de l'un à l'autre et dont la loi de variation dépend de la forme de la fonction f_2, les ordonnées reprendront les mêmes valeurs, tandis que entre les vitesses ou condensations, qui répondent aux limites ces intervalles de temps, il y aura les rapports

$$\frac{v_1}{v} = \frac{{}^2f(x,t_1)}{{}^2f(x,t)}, \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{{}^2f(x,t_2)}{{}^2f(x,t_1)} \ldots\ldots \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{{}^2f(x,t_{n+1})}{{}^2f(x,t_n)} \ldots\ldots \qquad (377)$$

Au lieu d'exprimer les vitesses des différents points du système correspondantes à un temps quelconque t_n en fonction des vitesses des mêmes points correspondantes à un autre intervalle de temps immédiatement antérieur où les ordonnées auront repris les mêmes valeurs, on peut le faire en fonction d'un premier état initial. Pour cela on n'a qu'à intégrer l'équation aux différences

$$v_{n+1} = \frac{{}^2f(x, t_{n+1})}{{}^2f(x, t_n)} v_n \tag{378}$$

après qu'on y aura remplacé t_n et t_{n+1} par leurs valeurs en fonction de t et x, données par l'équation aux différences finies (374),

L'intégration de cette équation nous conduit encore à connaître la loi de variation du temps selon laquelle les différents points du système reprennent les mêmes positions quoique animés de vitesses différentes.

Pour intégrer l'équation (374), posons

$$f_2(x, t_n) = \log y_n; \tag{379}$$

on aura

$$\log y_{n+1} = \log y_n + 2[f_1(b) - f_1(a)]; \tag{380}$$

ou

$$y_{n+1} = e^{2[f_1(b) - f_1(a)]} y_n. \tag{381}$$

L'intégrale de cette équation aux différences finies est

$$y_n = C e^{2[f_1(b) - f_1(a)]n}; \tag{382}$$

où C est une constante arbitraire.

L'équation (379) donne après

$$f_2(x, t_n) = 2[f_1(b) - f_1(a)]n + l C. \tag{383}$$

Pour déterminer la constante, faisons $n = 0$ et au lieu de t_0 mettons t; on aura

$$f_2(x, t_n) = 2[f_1(b) - f_1(a)]n + f_2(x, t). \tag{384}$$

Il n'y a plus qu'à résoudre cette équation algébrique ou transcendante par rapport à t_n pour connaître la valeur de cette variable, valeur que nous désignerons par

$$t_n = {}^2f[2n + f_2(x, t)] = {}_2f[2[f_1(b) - f_1(a)]n + f_2(x, t)]. \tag{385}$$

L'intégration de l'équation (378) conduit à la détermination de v_n en fonction de x et t. Cette intégration se fait d'une manière très-simple en éliminant v_1, v_2, v_3, etc. entre les équations (377), qui donnent immédiatement

$$v_n = v \frac{{}^2f(x, t_n)}{{}^2f(x, t)}; \tag{386}$$

ou

$$v_n = v \frac{{}^2f[x, {}_2f[2[f_1(b) - f_1(a)]n + f_2(x, t)]]}{{}^2f(x, t)} \tag{387}$$

en vertu de l'équation (385).

Nous sommes donc arrivés à déterminer les principales circonstances du mouvement, et cela, comme on voit, sans qu'on ait eu besoin d'intégrer les équations différentielles du problème.

XXXII.

On a supposé, en résolvant le Problème II, que les fonctions arbitraires des équations (352) et (355), les coefficients α_1, β_1, etc.; α_2, β_1, etc. qui dans l'intégrale (357) multiplient les fonctions arbitraires, étaient indépendants de t. Voyons quelle forme cela suppose à l'équation (352)

Généralement, pour qu'une équation linéaire et à deux variables indépendantes ne renferme dans les coefficients qui multiplient ses fonctions arbitraires qu'une seule des deux variables, il faut

que ses coefficients ne possèdent pas cette variable. Donc pour que cette équation, ayant les fonctions (355) pour fonctions arbitraires, n'ait pas pourtant la variable t dans les coefficients qui dans son intégrale multiplie les fonctions arbitraires, il faut qu'en faisant

$$ {}_2f(x, t) = t_1 \tag{388}$$

et prenant x et t_1 pour variables indépendantes, la transformée de l'équation (352) soit une autre équation dont les coefficients soient constants par rapport à t_1. Cette équation aura deux fonctions arbitraires de la forme

$$ \varphi[f_1(x) + {}_1f(x) + t_1], \qquad \psi[f_1(x) - {}_1f(x) + t_1] \tag{389}$$

et dans son intégrale, donnée par une série de la forme (357), les coefficients seront indépendants de t_1. Mettant ensuite au lieu de t_1 sa valeur et faisant, pour abréger,

$$ {}_1f(x) + {}_2f(x, t) = f_2(x, t), \tag{390}$$

on trouve la forme d'intégrale que nous avons supposée.

Des équations de ce genre se présentent très-souvent, comme on sait, dans les problèmes de Physique.

XXXIII.

Le problème du N° XXXI pourrait être résolu indépendamment de toute série; mais au lieu de reprendre, pour le faire voir, la solution que nous avons donnée, il vaut mieux résoudre un problème analogue qui est d'ailleurs d'une très-grande importance dans les applications de l'Analyse à la Physique.

Problème III. Déterminer la fonction z qui satisfait à l'équation générale

$$ F\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dt}, z, x, t\right) = 0, \tag{391}$$

pour toutes les valeurs de x et t; et aux équations

$$ \frac{dz}{dt} = F_1(x), \quad \frac{dz}{dx} = F_2(x) \quad \text{pour} \quad t = 0 \quad \text{depuis} \quad x = 0 \quad \text{jusqu'à} \quad x = l, \tag{392}$$

à l'exception des valeurs extrêmes de cette variable pour lesquelles on a

$$ \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{quelque soit} \quad t, \tag{393}$$

$$ \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = l \quad \text{quelque soit} \quad t. \tag{394}$$

Je supposerai dans ce problème que les fonctions arbitraires de l'équation (391) soient

$$ \varphi[f_1(t) + f_2(x)], \qquad \psi[f_1(t) - f_2(x)], \tag{395}$$

et que les quantités qui se combinent dans l'intégrale avec ces fonctions soient indépendantes de t. J'admettrai encore, pour simplifier le calcul, que l'on ait

$$ f_2(0) = 0. $$

En suivant le même procédé que nous allons indiquer, on pourrait rendre plus général le problème que nous traitons, mais tel qu'il est, il est déjà assez général pour faire voir l'importance de nos méthodes et pour les applications que nous en aurons à faire dans un autre mémoire.

D'après les suppositions que nous venons de faire, l'intégrale de l'équation (391) pourra être mise sous la forme

$$\left.\begin{aligned} z \;&=\int_{-1}^{+1}\Theta_1(x,\omega)\,\varphi[f_1(t)+\omega^2 f_2(x)]\,d\omega \\ &+\int_{-1}^{+1}\Theta_2(x,\omega)\,\psi[f_1(t)-\omega^2 f_2(x)]\,d\omega; \end{aligned}\right\} \tag{395}$$

$\Theta_1(x,\omega)$, $\Theta_2(x,\omega)$ étant deux fonctions de x et ω dépendant des coefficients de la proposée, et dont on ne suppose pas les formes connues. Malgré cela pourtant il s'agit de faire voir comment on peut déduire de cette valeur de z les principales circonstances du mouvement du système que l'on considère.

Premièrement je remarque qu'en différentiant cette valeur de z successivement par rapport à t et x, et en y faisant $t=0$, et puis égalant les résultats respectivement à $F_1(x)$, $F_2(x)$, on aura deux équations renfermant deux fonctions arbitraires de x, au moyen desquelles on pourra les satisfaire. Ces équations déterminent les fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$; la première depuis

$$s = f_1(0) \quad \text{jusqu'à} \quad s = f_1(0) + \omega^2 f_2(l); \tag{398}$$

et la seconde depuis

$$s = f_1(0) \quad \text{jusqu'à} \quad s = f_1(0) - \omega^2 f_2(l): \tag{399}$$

Elles restent pour le moment arbitraires pour des valeurs de s qui tombent en dehors de ces limites. On va maintenant déterminer ces parties inconnues des fonctions arbitraires en tâchant de satisfaire aux conditions (393), (394), relatives aux points extrêmes.

Pour cela, différentions z par rapport à t et faisons y $x=0$; différentions aussi la même expression par rapport à x et faisons y $x=l$: puis faisant attention aux équations (393), (394), on aura

$$0 = \int_{-1}^{+1}\Theta_1(0,\omega)\,\varphi'[f_1(t)]\,d\omega + \int_{-1}^{+1}\Theta_2(0,\omega)\,\psi'[f_1(t)]\,d\omega, \tag{400}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \;&=\int_{-1}^{+1}\Theta_1(l,\omega)\,\varphi'[f_1(t)+\omega^2 f_2(l)]\,d\omega + \int_{-1}^{+1}\Theta_2(l,\omega)\,\psi'[f_1(t)-\omega^2 f_2(l)]\,d\omega \\ &-\frac{1}{f_1(l)}\left[\int_{-1}^{+1}\omega^2\Theta_1'(l,\omega)\,\varphi[f_1(t)+\omega^2 f_2(l)]\,d\omega - \int_{-1}^{+1}\omega^2\Theta_2'(l,\omega)\,\psi'[f_1(t)-\omega^2 f_2(l)]\,d\omega\right]; \end{aligned}\right\} \tag{401}$$

en désignant par $\Theta_1(l,\omega)$, $\Theta_2'(l,\omega)$, les dérivées de $\Theta_1(x,\omega)$, $\Theta_2(x,\omega)$ par rapport à x, quand on y fait $x=l$.

Si l'on fait, pour abréger,

$$\int_{-1}^{+1}\Theta_1(0,\omega)\,d\omega = {}_1\Theta, \quad \int_{-1}^{+1}\Theta_2(0,\omega)\,d\omega = {}_2\Theta, \quad \omega^2 f_2(l) = \xi, \quad f_1(t) = \zeta; \tag{402}$$

ces équations se réduisent à

$$0 = {}_1\Theta\,\varphi'(\zeta) + {}_2\Theta\,\varphi'(\zeta), \tag{403}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \;&=\int_{-1}^{+1}\Theta_1(l,\omega)\,\varphi'[\zeta+\xi]\,d\omega + \int_{-1}^{+1}\Theta_2(l,\omega)\,\psi'[\zeta-\xi]\,d\omega \\ &-\frac{1}{f_2(l)}\left[\int_{-1}^{+1}\omega^2\Theta_1'(l,\omega)\,\varphi[\zeta+\xi]\,d\omega - \int_{-1}^{+1}\omega^2\Theta_2'(l,\omega)\,\psi'[\zeta-\xi]\,d\omega\right] \end{aligned}\right\} \tag{404}$$

De la première de ces équations et de son intégrale, on déduit

$$\psi'(\zeta) = -\frac{{}_1\Theta}{{}_2\Theta}\varphi'(\zeta), \qquad \psi(\zeta) = -\frac{{}_1\Theta}{{}_2\Theta}\varphi(\zeta), \tag{405}$$

si l'on suppose nulle la constante arbitraire; ce qui revient à admettre que l'on ait

$$z = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0; \tag{406}$$

chose permise en choisissant convenablement l'axe des abscisses.

Les égalités (405) transforment l'équation (404) en

$$\left.\begin{aligned} 0 = &\int_{-1}^{+1}[\omega^2\Theta_1(l,\omega)\varphi'(\zeta+\xi) + \frac{1}{f_2(l)}\Theta_1'(l,\omega)\varphi(\zeta+\xi)]\,d\omega \\ &+ \frac{{}_1\Theta}{{}_2\Theta}\int_{-1}^{+1}[\omega^2\Theta_2(l,\omega)\varphi'(\zeta-\xi) - \frac{1}{f_2(l)}\Theta_2'(l,\omega)\varphi(\zeta-\xi)]\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{407}$$

Si nous considérons maintenant le temps croissant continuellement afin que l'on détermine les états successifs par lesquels le système passe, la fonction ζ variera d'une manière plus ou moins rapide selon la forme de la fonction $f_1(\zeta)$. Supposant par ces valeurs de t qu'elle devienne égale à $\zeta + 2n\xi$, l'équation précédente deviendra

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1}[\omega^2\Theta_1(l,\omega)\varphi'[\zeta+(2n+1)\xi] + \frac{1}{f_1(l)}\Theta_1'(l,\omega)\varphi[\zeta+(2n+1)\xi]]\,d\omega = \\ -\frac{{}_1\Theta}{{}_2\Theta}&\int_{-1}^{+1}[\omega^2\Theta_2(l,\omega)\varphi'[\zeta+(2n-1)\xi] - \frac{1}{f_1(l)}\Theta_2'(l,\omega)\varphi[\zeta+(2n-1)\xi]]\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{408}$$

Or cette équation devant avoir lieu quelque soit la fonction φ ou quelles que soient les fonctions F_1, F_2 relatives à l'état initial dont elle dépend, on aura en général

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{+1}\omega_2\Theta_1(l,\omega)\varphi'[\zeta+(2n+1)\xi]\,d\omega &= -\frac{{}_1\Theta}{{}_2\Theta}\int_{-1}^{+1}\omega^2\Theta_2(l,\omega)\varphi'[\zeta+(2n-1)]\,d\omega, \\ \int_{-1}^{+1}\Theta_1'(l,\omega)\varphi[\zeta+(2n+1)\xi]\,d\omega &= \frac{{}_1\Theta}{{}_2\Theta}\int_{-1}^{+1}\Theta_1'(l,\omega)\varphi[\zeta+(2n-1)]\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{409}$$

Ces équations font voir que l'une des deux fonctions $\varphi(s)$, $\varphi'(s)$ ne change pas de valeur quand la variable s reçoit un accroissement égal à 2ξ, tandis que l'autre conserve la même valeur numérique mais en changeant de signe; et, par suite, ces deux fonctions reprendront les mêmes valeurs toutes les fois que la variable s passera d'une valeur quelconque s à la valeur $s + 4\xi$.

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} \varphi[\zeta+4(n+1)\xi] &= \varphi[\zeta+4n\xi] \\ \varphi'[\zeta+4(n+1)\xi] &= \varphi'[\zeta+4n\xi]. \end{aligned}\right\} \tag{410}$$

Remplaçant dans la première de ces équations ζ et ξ par leurs valeurs données par les équations (402), on aura

$$\varphi[f_1(t)+4(n+1)\omega^2 f_2(l)] = \varphi[f_1(t)+4n\omega^2 f_2(l)]. \tag{411}$$

On avait déjà déterminé la fonction $\varphi(s)$ pour des valeurs de z comprises entre

$$s = f_1(0) \quad \text{et} \quad s = f_2(0) + \omega^2 f_2(l): \tag{412}$$

cette équation va la déterminer pour des valeurs quelconques de s.

En effet, posons

$$n = 0 \tag{413}$$

l'équation (414) deviendra

$$\varphi[f_1(t) + 4\omega^2 f_2(l)] = \varphi[f_1(t)]: \tag{414}$$

mais si l'on fait varier $f_1(t)$ depuis $t = 0$ jusqu'à une valeur t_1 de t telle que l'on ait

$$f_1(t_1) = f_1(0) + \omega^2 f_2(l); \tag{415}$$

la fonction $\varphi(s)$, étant déjà connue pour des valeurs de s qui s'étendent entre ces deux limites, l'équation (414) donnera les valeurs de la même fonction pour ceux qui s'étendent depuis

$$s = f_1(0) + \omega^2 f_2(l) \quad \text{jusqu'à} \quad s = f_1(0) + 5\omega^2 f_2(l); \tag{416}$$

et ainsi de suite pour une valeur quelconque de s.

En vertu de la seconde des équations (405), les mêmes remarques pouvant être appliquées à la fonction $\psi(0)$, et s'étendant également à leurs dérivées, il en résulte que si l'on fait

$$\frac{dz}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dx} = s; \tag{417}$$

les fonctions

$$z, \qquad s, \qquad \frac{v}{f_1'(t)}, \tag{418}$$

reprendront les mêmes valeurs, et, par conséquent, le système reviendra au même état toutes les fois que le temps passera d'une valeur t_n à une autre valeur t_{n+1} déterminée par l'équation

$$f_1(t_{n+1}) = f_1(t_n) + 4 f_2(l). \tag{419}$$

Si, dans l'équation (408), on remplaçait les fonctions $\varphi(s)$ et $\varphi'(0)$ par des séries de sinus et cosinus, on arriverait d'une manière plus prompte aux résultats que nous venons d'énoncer.

XXXIV.

On peut facilement étendre à plusieurs variables les problèmes que nous venons de résoudre pour trois.

Problème IV. Déterminer la fonction φ qui satisfait à l'équation linéaire

$$\left.\begin{aligned} &P\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Q\frac{d^2\varphi}{dx^2} + R\frac{d^2\varphi}{dy^2} + S\frac{d^2\varphi}{dz^2} \\ &+ T\frac{d^2\varphi}{dt\,dx} + U\frac{d^2\varphi}{dt\,dy} + V\frac{d^2\varphi}{dt\,dz} \\ &+ X\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + Y\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + Z\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + W = 0; \end{aligned}\right\} \tag{420}$$

dans laquelle

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ X,\ Y,\ Z, \tag{421}$$

désignent des fonctions quelconques des variables indépendantes x, y, z et t; W une fonction des mêmes variables et de φ ainsi que de ses dérivées du premier ordre, linéaire relativement à ces dernières quantités, quelles que soient les variables x, y, z et t; et aux équations

$$\varphi = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \text{quand} \quad t = 0; \tag{422}$$

mais seulement pour les valeurs de x, y et z qui sont comprises dans une sphère dont le rayon est s.

Dans les problèmes de Mécanique, $\frac{d\varphi}{dt}$ désignant une vitesse, une condensation ou toute autre manifestation du mouvement, et φ pouvant désigner l'accroissement que reçoit une ordonnée ou toute autre fonction quelconque du mouvement, les équations (422) reviennent à supposer qu'à l'origine du problème tous les points du système se trouvaient en repos, excepté ceux qui étaient compris dans une sphère dont le rayon est ε. Pour simplifier le calcul, je la supposerai concentrique avec l'origine des coordonnées.

La première chose qu'il faut faire, en suivant nos méthodes, pour résoudre le problème proposé c'est de déterminer les fonctions arbitraires de l'équation (420), ce que l'on fera, soit en déterminant deux valeurs de u qui satisfassent à l'équation

$$\left.\begin{aligned} &P\frac{du^2}{dt^2} + Q\frac{du^2}{dx^2} + R\frac{du^2}{dy^2} + S\frac{du^2}{dz^2} \\ &+ T\frac{du}{dt}\frac{du}{dx} + U\frac{du}{dt}\frac{du}{dy} + V\frac{du}{dt}\frac{du}{dz} \\ &+ X\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + Y\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} + Z\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{423}$$

soit en s'aidant de l'intégrale de l'équation

$$\left.\begin{aligned} &P\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Q\frac{d^2\varphi}{dx^2} + R\frac{d^2\varphi}{dy^2} + S\frac{d^2\varphi}{dz^2} \\ &+ T\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + U\frac{d^2\varphi}{dt\,dy} + V\frac{d^2\varphi}{dt\,dz} \\ &+ X\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + Y\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + Z\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + W' = 0; \end{aligned}\right\} \tag{424}$$

où W' désigne une fonction quelconque de x, y, z, t; et de φ ainsi que de ses dérivées du premier ordre par rapport à ces variables, φ et ses dérivées entrant d'une manière linéaire dans cette fonction.

On sait déjà que les fonctions arbitraires de cette équation sont les mêmes que celles de l'équation (420), et comme on peut choisir à volonté la fonction W', on pourra le plus souvent déterminer facilement son intégrale ou du moins des fonctions qui la vérifient.

Quelle que soit la méthode qu'on ait employée, admettons que ces fonctions arbitraires soient connues et désignons l'une d'elles par

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Xi\,\Psi[\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega; \tag{425}$$

Ξ désignant une fonction de toutes ou de plusieurs des variables indépendantes de la proposée et de ω_1, ω_2, ω_3; et Ω_1, Ω_2, Ω_3, étant trois fonctions données par

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= f_1(x, y, z, t) + \cos\omega_{1\,1} f(x, y, z, t), \\ \Omega_2 &= f_2(x, y, z, t) + \cos\omega_{2\,2} f(x, y, z, t), \\ \Omega_3 &= f_3(x, y, z, t) + \cos\omega_{3\,3} f(x, y, z, t); \end{aligned}\right\} \tag{426}$$

et Ψ une caractéristique de fonction arbitraire.

L'intégrale de l'équation pourra donc être mise sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Xi\, \Pi_1\, \Psi\,[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3 \\ &+ \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Xi\, \Pi_2\, \Phi\,[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3\,;\end{aligned}\right\} \quad (427)$$

désignant par Π_1, Π_2 deux fonctions dont la nature dépend des coefficients de l'équation proposée; Ψ, Φ deux caractéristiques de fonctions arbitraires; et Θ_1, Θ_2, Θ_3 trois fonctions déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned}\Theta_1 &= \cos\theta_1 f_1(x, y, z, t) + \cos\omega_1\, {}_1f(x, y, z, t), \\ \Theta_2 &= \cos\theta_2 f_2(x, y, z, t) + \cos\omega_2\, {}_2f(x, y, z, t), \\ \Theta_3 &= \cos\theta_3 f_3(x, y, z, t) + \cos\omega_3\, {}_3f(x, y, z, t);\end{aligned}\right\} \quad (428)$$

et par f_1 et ${}_1f$, etc., des fonctions déterminées, dépendant des coefficients de l'équation (420) et qu'on ne suppose pas connues.

Maintenant, en suivant un raisonnement très-souvent employé dans les pages antérieures, on voit qu'il n'y aura de mouvement que tant que ces trois fonctions auront des valeurs comprises entre les valeurs maxima et minima qu'acquièrent les fonctions

$$\left.\begin{aligned}&\cos\theta_1 f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) + \cos\omega_1\, {}_1f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0), \\ &\cos\theta_2 f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) + \cos\omega_2\, {}_1f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0), \\ &\cos\theta_3 f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) + \cos\omega_3\, {}_3f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0),\end{aligned}\right\} \quad (429)$$

lorsqu'on donne aux variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 des valeurs comprises entre les limites $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$.

Donc, si l'on pose

$$\left.\begin{aligned}&[f_1(x, y, z, t)]^2 + [f_2(x, y, z, t)]^2 + [f_3(x, y, z, t)]^2 = \rho_1^2, \\ &[{}_1f(x, y, z, t)]^2 + [{}_2f(x, y, z, t)]^2 + [{}_3f(x, y, z, t)]^2 = {}_1\rho^2, \\ &[f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]^2 + [f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]^2 + [f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]^2 = r_1^2, \\ &[{}_1f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]^2 + [{}_2f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]^2 + [{}_3f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)]^2 = {}_1r^2;\end{aligned}\right\} \quad (430)$$

et si l'on admet qu'on ait

$$\rho_1^2 > r_1^2, \qquad {}_1\rho^2 > {}_1r^2; \quad (431)$$

il est évident qu'il y aura repos absolu du système, excepté pour les valeurs de y et de z qui seront prises parmi celles qui satisfont à l'équation

$$(\rho_1 - {}_1\rho)^2 = (r_1 - {}_1r)^2. \quad (432)$$

Cette équation renferme complètement les lois du mouvement: les surfaces qui séparent les parties du système qui sont en repos de celles qui sont en mouvement, ou les surfaces limites des ondes, leur nombre, la position et la vitesse de leurs points extrêmes, le temps de vibration de chaque molécule, etc., etc.

XXXV.

Problème V. Déterminer la fonction φ qui satisfait à l'équation linéaire

$$\left.\begin{aligned} &R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Q\frac{d^2\varphi}{dx^2} + R\frac{d^2\varphi}{dy^2} + S\frac{d^2\varphi}{dz^2} \\ &+ T\frac{d^2\varphi}{dt\,dx} + U\frac{d^2\varphi}{dt\,dy} + V\frac{d^2\varphi}{dt\,dz} \\ &+ X\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + Y\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + Z\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + W = 0; \end{aligned}\right\} \tag{433}$$

dans laquelle

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ X,\ Y,\ Z \tag{434}$$

sont des fonctions quelconques des variables x, y, z sans t et W une fonction des trois premières de ces variables, de φ ainsi que de ses dérivées du premier ordre; cette équation devant avoir lieu pour toutes les valeurs possibles des variables indépendantes.

La fonction φ doit encore satisfaire aux équations

$$\varphi = {}^{(1)}f(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = {}^{(2)}f(x, y, z), \quad \text{quand} \quad t = 0, \tag{435}$$

pour tous les points du système qui se trouvent compris entre deux surfaces dont les équations sont

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0; \tag{436}$$

à l'exclusion pourtant de leurs points extrêmes, qui se trouvent sur les surfaces mêmes, et pour lesquels on suppose que l'on ait

$$\varphi = 0, \ \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{et pour} \quad F_2(x, y, z) = 0, \tag{437}$$

quelque soit d'ailleurs la valeur de t.

Les coefficients de l'équation (433) étant constants par rapport à t, on pourra mettre son intégrale sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \varphi = &\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Xi_1\,\Psi[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3 \\ + &\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Xi_2\,\Phi[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3; \end{aligned}\right\} \tag{438}$$

où l'on désigne par Ψ, Φ deux caractéristiques de fonctions arbitraires; Ξ_1, Ξ_2 deux fonctions dépendantes de ses coefficients et renfermant, par conséquent, dans son expression toutes les variables indépendantes moins t; $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ trois fonctions définies par les équations

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \cos\theta_1 \cos\omega_1 f_1(x, y, z) + t, \\ \Theta_2 &= \cos\theta_2 \cos\omega_2 f_2(x, y, z) + t, \\ \Theta_3 &= \cos\theta_3 \cos\omega_3 f_3(x, y, z) + t. \end{aligned}\right\} \tag{439}$$

Cette valeur de φ satisfaisant déjà à l'équation (433), pour l'obliger à satisfaire encore aux égalités (435), on n'a qu'à disposer de la forme des fonctions

$$\Psi[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3], \qquad \Phi[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3], \tag{440}$$

pour les valeurs de x, y et z, qui sont les coordonnées de tous les points compris entre les deux surfaces définies par les équations (436); à l'exclusion pourtant des points extrêmes

qui se trouvent sur les surfaces elles-mêmes et pour lesquels ces fonctions doivent satisfaire aux équations qui résultent de la substitution de la valeur précédente de φ dans les deux premières équations (437).

Pour les satisfaire on n'a qu'à disposer de la forme des fonctions (440) pour les valeurs de x, y, z, etc. qui tomberont en dehors des deux surfaces dont les équations sont (436). Or, si l'on désigne respectivement par

$$z = {}_1F(x, y), \qquad z = {}_2F(x, y), \tag{441}$$

les valeurs de z qu'on en déduit, il est évident que l'on satisfait aux équations ci-dessus dans toutes les conditions du problème, si l'on suppose que les fonctions (442) reprennent les mêmes valeurs quand les trois fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3 passent des valeurs

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta_1 \cos\omega_1 f_1(x, y, z) + t_n, \\ &\cos\theta_2 \cos\omega_2 f_2(x, y, z) + t_n, \\ &\cos\theta_3 \cos\omega_3 f_3(x, y, z) + t_n, \end{aligned}\right\} \tag{442}$$

correspondantes à une certaine valeur t_n de t, aux nouvelles valeurs

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta_1 \cos\omega_1 f_1(x, y, z) + t_{n+1}, \\ &\cos\theta_2 \cos\omega_2 f_2(x, y, z) + t_{n+1}, \\ &\cos\theta_3 \cos\omega_3 f_3(x, y, z) + t_{n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{443}$$

correspondantes à une autre valeur t_{n+1} de la même variable, devant y avoir entre ces deux valeurs de t les rapports

$$\left.\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \cos\theta_1 \cos\omega_1 [f_1[x, y, {}_2F(x, y)] - f_1[x, y, {}_1F(x, y)]] \\ t_{n+1} &= t_n + \cos\theta_2 \cos\omega_2 [f_2[x, y, {}_2F(x, y)] - f_2[x, y, {}_1F(x, y)]] \\ t_{n+1} &= t_n + \cos\theta_3 \cos\omega_3 [f_3[x, y, {}_2F(x, y)] - f_3[x, y, {}_1F(x, y)]] \end{aligned}\right\} \tag{443}$$

dont il est facile de déduire des lois du mouvement du système.

XXXVI.

Les problèmes précédents suffisent pour montrer, il me semble, l'immense importance, dans la Physique mathématique de notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires; en effet dans les problèmes que nous venons de résoudre on voit facilement le moyen de déterminer d'une manière générale toute question de propagation ou vibration du mouvement dans un milieu élastique quelconque. En effet dans le problème I on voit de moyen de déterminer la propogation d'un mouvement dans un milieu dont deux dimensions sont très-petites relativement à la troisième pourqu'il suffise de considérer le mouvement suivant cette direction seulement. On peut y supposer l'élasticité, température, conductibilité, variant d'une manière quelconque au long du système, dont les différentes parties sont sollicitées par des forces accélératrices quelconques, en un mot, supposer variables tous les éléments qui peuvent entrer dans un corps élastique, sans que pourtant l'équation proposée cesse d'être linéaire. Si les éléments du problème ne varient pas avec le temps, mais seulement avec x et cela d'une manière quelconque, on obtiendra tout de suite les lois du mouvement; dans le cas contraire on n'aura qu'une équation du premier ordre à traiter. Les problèmes II et III donnent les lois relatives à l'état vibratoire des corps à une seule dimension, en supposant tous les éléments du problème variant d'une

manière quelconque au long du système; et les problèmes suivants résolvent à trois dimensions les questions que les autres avaient résolues relativement à une seule.

Une conclusion générale qu'offrent encore ces problèmes et généralement notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires, c'est que si l'on a une équation aux différentielles partielles et qu'on ait donné une interprétation géométrique de ce que ses différents termes représentent, et si de l'autre coté on trouve que telle ou telle fonction ou manifestation du mouvement ne dépend que de ces fonctions arbitraires, ces fonctions ou manifestations du mouvement ne dépendent pas des termes des ordres inférieurs ou de ce que ces termes représentent. C'est ainsi que si l'on prend l'équation

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \\ &+ \frac{dV}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{d\varphi}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (444)$$

qui renferme la loi de propagation du son dans une masse gaseuse et à trois dimensions dont les molécules sont sollicités par des forces accélératrices quelconques, on trouve que cette loi ne dépend aucunement de la fonction V des forces qui entre dans cette équation; d'où il résulte une belle loi de la nature, que son importance nous engage à développer dans un mémoire spécial qui viendra dans ce Recueil ayant pour titre *Mémoire sur la théorie du son*. Dans ce mémoire je donne non seulement les lois de la propogation du son lorsque les molécules de l'air n'exécutent que des oscillations très-petites, mais dans le cas aussi où ses vitesses peuvent être quelconques et où par conséquent les formules cessent d'être linéaires. (Voyez aussi le Mémoire sur l'état de vibration des corps.)

Une remarque que je dois faire encore en terminant, c'est que tandis qu'en suivant les méthodes ordinaires, on est obligé, en voulant discuter un problème, d'intégrer complètement l'équation aux différentielles partielles qui est son expression, ici, à l'aide de notre théorème, on laisse l'intégration de côté où on s'arrête au milieu, et à travers une foule d'intégrales à peine indiquées on va saisir les lois du problème que l'on veut analyser. C'est aussi à cause de cette manière de dispenser l'intégration que des problèmes très-difficiles, inaccessibles par les méthodes ordinaires, sont pourtant facilement résolus par notre théorème sur la composition des fonctions arbitraires.

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie *.

(Premier Extrait.)

I.

Dans ce Mémoire j'ai principalement pour but la détermination de la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait aux équations

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,(x+\theta)\,d\theta = F(x), \qquad (1) \qquad\qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(\theta x)\,d\theta = F(x), \qquad (2)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)+x\,f_1(\theta)]\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \quad (3) \qquad\qquad \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)+x.f_1(\theta)]\,\varphi(\theta x)\,d\theta = F(x); \quad (4)$$

où $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ sont des fonctions quelconques de θ; $F(x)$ une fonction aussi quelconque de x, donnée comme les précédentes; α et β des constantes, prises à volonté, et indépendantes, par conséquent, de x et θ. Si l'on prend chacune de ces équations et qu'on les différentie par rapport à d et $\triangle$, et qu'on les intègre relativement aux signes $\int$ et Σ autant de fois qu'on veut; et si l'on fait après la somme membre à membre des équations qui en résultent, après avoir mis à la place de $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ d'autres fonctions quelconques de θ, indépendantes les unes des autres, et remplacé les constantes α et β par d'autres constantes α_1, β_1, α_2, β_2, etc., on aura de nouvelles équations dont les solutions se trouvent encore dans ce Mémoire.

Quand on lit le Mémoire de M. Liouville qui a pour titre: «*Mémoire sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces questions*» (Journal de l'Ecole Polytechnique 21ième cahier) et on voit les belles applications qu'il a faites à la Philosophie naturelle, résolvant les deux équations très-simples

$$\int_{0}^{\infty} \theta^{\mu-1}\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \qquad (5) \qquad\qquad \int_{0}^{1} (1-\theta)^{p}\,\varphi\left(\frac{\theta}{x}\right) d\theta = F(x); \quad (6)$$

(chose à laquelle revient au fond son Mémoire), qui sont des cas-très particuliers de nos équations (1) et (2); et que lui, ainsi que d'autres géomètres, ont composé plusieurs Mémoires sur le même sujet, il me semble que les problèmes dont je m'occupe ici sont assez dignes d'attention.

* Ce Mémoire a été présenté à l'Institut de France. Il a été composé avant celui qui est à la tête de ce Recueil.

M. Liouville lui-même signalait déjà depuis longtemps d'une manière très remarquable l'importance et l'utilité de telles recherches, et le rang distingué qu'il tient parmi les géomètres ainsi que la manière dont il parle me font un devoir de citer ici ses propres paroles, qui me font beaucoup d'honneur. Il dit, en effet (p. 15 du Mémoire cité): «La résolution de la plupart des problèmes physico-mathé»matiques dépend au fond d'une question semblable à celle que nous venons de traiter, et de la déter»mination d'une fonction arbitraire placée sous le signe d'intégration $\int$ comme la fonction $\varphi(x)$. Ainsi »les propriétés des différentielles à indice quelconque se lient aux théories mathématiques les plus »épineuses et les plus difficiles.»

La question qu'il venait de résoudre était celle-ci

$$\int_0^\infty \sqrt{\theta}\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = \frac{a^2}{\sqrt{zx}} \tag{7}$$

les différentielles à indices quelconques n'y sont entrées que comme moyen de résoudre cette égalité. Il en resulte que tout ce que M. Liouville a dit plus haut relativement à son Calcul à indices fractionnaires s'applique aux problèmes dont nous nous sommes occupés, savoir de déterminer des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

II.

Les deux équations (5) et (6) embrassent tous les cas où le problème de déterminer une fonction inconnue entrant sous le signe d'intégration définie aient été résolu; parce que la formule d'Abel qui se trouve dans un des premiers volumes du Journal de M. Crelle et au moyen de laquelle il avait résolu le problème de la tautochrone, ne donne que la solution de l'équation (6)*. «*Dans le Cambridge and Dublin mathématical Journal*» il y a un article sur ce sujet: mais il ne contient que quelques remarques sur les cas où l'on peut faire usage des formules que M. Liouville a données pour résoudre les équations (5) et (6), et sur la transformation des différentielles à indices fractionnaires en intégrales définies, sans aucun cas nouveau du problème dont il est ici question.

Indépendamment des problèmes de ce genre qui forment le sujet principal de ce Mémoire, il s'y trouve la solution de plusieurs questions incidentes qui par elles-mêmes sont dignes d'attention et que je renvois maintenant vers la fin.

* On lit dans le Recueil des oeuvres complètes d'Abel (t. II, p. 224): «Je remarquerai à la fin que de la même »manière que de l'équation

$$\psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$$

»j'ai trouvé s, ainsi de l'équation

$$\psi(a) = \int_0^a f(x)\, \varphi(ax)\, dx$$

»j'ai trouvé la fonction φ: où f et ψ sont des fonctions données, l'intégrale étant prise entre des limites quelconques, »mais la solution du problème est trop longue pour être donnée ici.» On n'a pas trouvé nulle part dans ce papier la solution de ce problème.

III.

Nous donnerons plusieurs méthodes pour résoudre les équations (1), (2), (3) et (4) et d'autres du même genre qui se trouvent dans ce Mémoire. Quelques unes de ces méthodes sont fondées sur les intégrales définies, d'autres sur les suites: mais tandisque les premières sont générales et s'appliquent dans tous les cas, quelque soient les fonctions $f(\theta)$, $f_1(\theta)$, etc., les solutions en suite seront restreintes au cas où ces suites seront convergentes. Comme dans ces problèmes il se trouve toujours des fonctions générales $f(\theta)$, $f_1(\theta)$, etc. qui peuvent affecter toutes les formes possibles, les suites seront convergentes ou divergentes selon la forme de ces fonctions. Cela posé, dans chaque cas particulier où la forme des fonctions $f(\theta)$, $f_1(\theta)$, etc. sera donnée, on examinera si les suites sont convergentes ou non: dans le premier cas on en fera usage, dans le dernier on doit les rejeter et avoir alors recours aux solutions un peu moins simples données par les intégrales définies. C'est une observations que je fais ici une fois pour toutes et dont on doit toujours se rappeler sans que j'aie besoin de la répéter à tout moment dans la suite.

IV.

Occupons-nous premièrement de l'équation (1).

Dans la première méthode dont nous avons fait usage pour résoudre cette équation on suppose que $F(x)$ soit développable en suite de la forme

$$F(x) = A_0 + A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + \text{etc.}; \tag{8}$$

et posant après

$$\varphi(x) = B_0 + B_1 e^{m_1 x} + B_2 e^{m_2 x} + \text{etc.}, \tag{9}$$

on trouve que la fonction

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta} + \frac{A_1}{\int_\alpha^\beta e^{m_1\theta} f(\theta)\, d\theta} e^{m_1 x} + \frac{A_2}{\int_\alpha^\beta e^{m_2\theta} f(\theta)\, d\theta} e^{m_2 x} + \text{etc.}, \tag{10}$$

la satisfait.

Les calculs sont trop simples pour qu'on ait besoin de les développer: d'ailleurs ils se trouvent exposés avec détails dans les pages 35 et 36 de ce Recueil.

V.

Si l'équation (1) se réduisait à

$$\int_0^\infty \theta^{n-1} \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x), \tag{11}$$

et $F(x)$ était donné par l'équation

$$F(x) = A_1 e^{-m_1 x} + A_2 e^{-m_2 x} + \text{etc.}, \tag{12}$$

m_1, m_2, etc., étant des quantités réelles et positives ou imaginaires mais dont la partie réelle est positive, l'expression (10) se réduirait à

$$\varphi(x) = \frac{A_1 e^{-m_1 x}}{\int_0^\infty \theta^{n-1} e^{-m_1 \theta}\, d\theta} + \frac{A_2 e^{-m_2 x}}{\int_0^\infty \theta^{n-1} e^{-m_2 \theta}\, d\theta} + \text{etc.}; \tag{13}$$

ou a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(u)} [A_1 m_1^n e^{-m_1 x} + A_2 m_2^n e^{-m_2 x} + \text{etc.}], \tag{14}$$

mettant au lieu de l'intégrale eulérienne sa valeur symbolique. Si l'on rapproche cette équation de l'égalité (8), on trouve

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^n \Gamma(u)} \frac{d^n F(x)}{dx^n}, \tag{15}$$

en adoptant la définition de différentielles à indices fractionnaires de M. Liouville. La solution que nous venons de donner coïncide avec celle qu'a donnée ce géomètre de l'équation (11).

En effet, la formule fondamentale d'où il part est

$$\int_0^\infty \theta^{n-1} \varphi(x+\theta)\, d\theta = (-1)^n \Gamma(n) \int^n \varphi(x)\, dx^n \tag{16}$$

Eliminant à son moyen l'intégrale définie qui se trouve au premier membre de l'équation (11), on a

$$(-1)^n \Gamma(n) \int^n \varphi(x)\, dx^n = F(x). \tag{17}$$

Différenciant n fois de suite cette équation et divisant ses deux membres par $(-1)^n \Gamma(n)$ on trouve pour $\varphi(x)$ la même valeur que nous avons donnée plus haut.

VI.

Je placerai ici la remarque qui a été faite à la page 6 de ce Recueil, qu'il est toujours possible, ayant l'intégrale définie

$$\int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega, \tag{18}$$

où a, b, h désignent trois constantes, réelles ou imaginaires, finies ou infinies, $F_1(\omega)$ une fonction de ω, de lui faire reproduire telle fonction de x, $F(x)$, que l'on voudra, en disposant convenablement de ces quatre quantités : ou, autrement, qu'il est toujours permis de poser l'égalité

$$F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega. \tag{19}$$

Et non seulement cela est possible, mais on peut dans tous les cas pour chaque forme de la fonction $F(x)$, déterminer les quatre quantités a, b, h et $F_1(\omega)$ du second membre de cette équation. Si l'on se contente d'avoir $F_1(\omega)$ exprimé à l'aide d'une intégrale définie, on peut le faire tout de suite : mais il arrive que l'on peut dans des cas très étendus écrire cette fonction au moyen des simples caractéristiques ordinaires ; ou, ce qui revient au même, exécuter la transformation précédente à l'aide d'une seule intégration définie. Nous entrerons dans la suite de ce Mémoire dans quelques détails à ce sujet.

VII.

Cela posé, l'équation (1) pourra toujours être mise sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega, \tag{20}$$

posant

$$F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega. \tag{21}$$

Si l'on suppose maintenant

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} \varphi_1(\omega)\,d\omega, \tag{22}$$

$\varphi_1(\omega)$ étant une nouvelle fonction inconnue, cette équation deviendra

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\,d\theta \int_a^b e^{-h\omega x}\,\varphi_1(\omega)\,e^{-h\theta\omega}\,d\omega = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega, \tag{23}$$

ou

$$\int_a^b e^{-h\omega x}(\varphi_1\,\omega)\,d\omega \int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f(\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega\,d\omega). \tag{24}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\int_\alpha^\beta e^{-h\omega\theta} f(\theta)\,d\theta = f_1(\omega), \tag{25}$$

elle prendra encore la forme

$$\int_a^b e^{-h\omega x} f_1(\omega)\,\varphi_1(\omega)\,d\omega = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega; \tag{26}$$

et il est alors facile de voir qu'on peut la satisfaire en prenant pour $\varphi_1(\omega)$ la fonction

$$\varphi_1(\omega) = \frac{F_1(\omega)}{f_1(\omega)} = \frac{F_1(\omega)}{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f(\theta)\,d\theta}. \tag{27}$$

L'égalité (22) donne après

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{e^{-h\omega x} F_1(\omega)}{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f(\theta)\,d\theta}\,d\omega. \tag{28}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème I. *Si l'on a l'equation*

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x); \tag{29}$$

où $f(x)$, $F(x)$ *sont deux fonctions quelconques de* x; α *et* β *deux constantes finies ou infinies, réelles ou imaginaires, et si l'on pose*

$$F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega, \tag{30}$$

il est toujours possible de la satisfaire en prenant pour $\varphi(x)$ *la fonction*

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-h\omega x} F_1(\omega)}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega. \tag{31}$$

VIII.

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $f(\theta) = \theta^{n-1}$, cette expression de $\varphi(x)$ se réduit à

$$\varphi(x) = \frac{h^n}{\Gamma(u)} \int_0^{\infty} e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, \omega^n\, d\omega, \tag{32}$$

faisant attention à ce que, dans le cas actuel,

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{\infty} e^{-h\theta\omega}\, \theta^{n-1}\, d\theta = \frac{1}{(h\omega)^n} \int_0^{\infty} e^{-\theta}\, \theta^{n-1}\, d\theta = \frac{\Gamma(n)}{(h\omega)^n}; \tag{33}$$

ce qui suppose que h soit une constante réelle et positive, or bien imaginaire et de la forme $-m \pm f\sqrt{-1}$.

On peut faire coïncider cette valeur que l'on vient de trouver pour la fonction $\varphi(x)$ qui entre sous le signe d'intégration définie dans l'équation

$$\int_0^{\infty} \theta^{e-1}\, \varphi(x + \theta) = F(x) \tag{34}$$

avec celle qui se déduit des calculs de M. Liouville.

En effet, désignons par p une quantité < 1 et telle qui ajoutée à n, la somme $n + p$ devienne un nombre entier. Transformons l'intégrale

$$\frac{h^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, \omega^n\, d\omega, \tag{35}$$

en

$$\frac{h^{n+p}}{\Gamma(u)\,\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \theta^{p-1}\, d\theta \int_a^b e^{-h(x+\theta)\omega}\, \omega^{n+p}\, F_1(\omega)\, d\omega \tag{36}$$

mettant sous le signe d'intégration définie $\frac{\omega^{n+p}}{\omega^p}$ à la place de ω^n, et remplaçant après $\frac{1}{(h\omega)^p}$ par

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-h\theta\omega}\, \theta^{p-1}\, d\theta. \tag{37}$$

De l'équation (30), on déduit l'égalité

$$\frac{d^{n+p} F(x)}{dx^{n+p}} = (-h)^{n+p} \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, \omega^{p+n}\, d\omega; \tag{38}$$

qui permet de mettre la fonction (36) sous la forme

$$\frac{1}{(-1)^{p+n}\,\Gamma(u)\,\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{d^{n+p} F(x+\theta)}{dx^{n+p}}\, \theta^{p-1}\, d\theta. \tag{39}$$

On a donc définitivement

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^{n+p}\,\Gamma(u)\,\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{d^{n+p}\,F(x+\theta)}{dx^{n+p}}\,\theta^{p-1}\,d\theta. \tag{40}$$

Si l'on applique maintenant la formule (46), on trouvera premièrement

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^n\,\Gamma(u)}\,\frac{d^n F(x)}{dx^n}; \tag{41}$$

et faisant usage après de la formule

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n} = \frac{1}{(-1)^p\,\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{d^{n+p}\,F(x+\theta)}{dx^{n+p}}\,\theta^{p-1}\,d\theta \tag{42}$$

que M. Liouville a donnée pour trouver des dérivées à indices fractionnaires de la fonction $F(x)$, on retombe sur l'expression (40) de $\varphi(x)$ que nous avons trouvée plus haut.

Les calculs de M. Liouville supposent ainsi que les nôtres que h soit de la forme $-m \pm p\sqrt{-1}$.

IX.

Donnant à $f(\theta)$ différentes valeurs particulières, mais telles que l'on puisse exprimer l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f(\theta)\,d\theta \tag{43}$$

à l'aide de fonctions ordinaires, l'équation (31) donnera, sous une forme très simple, la solution d'une foule d'équations de la forme (1), correspondantes à ces valeurs particulières. Ainsi ayant en vue les formules connues

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{d\theta}{\theta} e^{-a\theta}\sin r\theta = arc\left(\mathrm{tg} = \frac{r}{a}\right), \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-a\theta}\cos 2\pi\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{r^2}{a}},\\
&\int_0^\infty e^{-a\theta}\cos r\theta\,d\theta = \frac{a}{a^2+r^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-a\theta}\sin r\theta\,d\theta = \frac{r}{r^2+a^2},\\
&\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{a\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{1+\theta^2} = \pi e^{-a}, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{a\theta\sqrt{-1}}}{\theta^2+1^2}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{z}}\,e^{-\frac{a}{\sqrt{z}}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{z}} + \sin\frac{a}{\sqrt{z}}\right),\\
&\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{a\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\frac{e^a-1}{e^a+1}, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{re^{a\theta\sqrt{-1}}}{\theta^2+r^2}\,d\theta = \pi e^{-ar},\\
&\int_{-\infty}^\infty \frac{\theta\,e^{a\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{\theta^2+r^2} = \pi e^{-ar}\sqrt{-1}, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{a\theta\sqrt{-1}}}{\theta}\,d\theta = \pi\sqrt{-1},\\
&\int_{-\infty}^\infty \frac{re^{a\theta\sqrt{-1}}}{\theta^2-r^2}\,x\theta = -\sin ar \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\theta e^{a\theta\sqrt{-1}}}{\theta^2-r^2}\,d\theta = \pi\cos ar\sqrt{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

on trouve que les valeurs de $\varphi(x)$ qui satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{\sin r\theta}{\theta}\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-x\omega}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_0^{\infty} \cos r\theta\,\varphi_*(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-x\omega}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_0^{\infty} \sin r\theta\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-\omega x}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\theta^2}\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{\omega x\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\theta^2}\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{\omega x\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}{1}\,\varphi(x+\theta)d\theta = \int_a^b e^{\omega x\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{r^2+\theta^2}\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{\omega x\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta\,\varphi(\theta+x)}{r^2+\theta^2}\,d\theta = \int_a^b e^{x\omega\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+\theta)}{\theta}\,d\theta = \int_a^b e^{x\omega\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\,\varphi(x+\theta)}{\theta^2-r^2}\,d\theta = \int_a^b e^{x\omega\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta\,\varphi(x+\theta)}{\theta^2-r^2}\,d\theta = \int_a^b e^{x\omega\sqrt{-1}}\,F_1(\omega)\,d\omega,
\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

sont données respectivement par

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{-x\omega} \frac{F_1(\omega)}{arc\left(\mathrm{tg} = \frac{r}{\omega}\right)} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{-x\omega} \frac{F_1(\omega)}{\frac{\omega}{\omega^2 + r^2}} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_b^b e^{-x\omega} \frac{F_1(\omega)}{\frac{r}{\omega^2 + r^2}} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{F_1(\omega)}{\pi e^{-\omega}} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{\sqrt{z}}{\pi} \frac{e^{-\frac{\omega}{\sqrt{z}}}\left(\cos\frac{\omega}{\sqrt{z}} + \sin\frac{\omega}{\sqrt{z}}\right) d\omega}{F_1(\omega)},$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{z}{\sqrt{-1}} \frac{F_1(\omega)}{\frac{e^{\omega} - 1}{e^{\omega} + 1}} d\omega, \qquad (46)$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{F_1(\omega)}{\pi e^{-\omega}} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{F_1(\omega)}{\pi e^{-r\omega}\sqrt{-1}} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{F_1(\omega)}{\pi\sqrt{-1}} d\omega,$$

$$\varphi(x) = -\int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{F_1(\omega)}{\pi\sqrt{-1}\cos r\omega} d\omega,$$

$$\varphi(x) = \int_a^b e^{x\omega} \sqrt{-1} \frac{F_1(\omega)}{\pi\sqrt{-1}\cos r\omega} d\omega.$$

X.

Quelquefois n'étant pas facile de réduire $F(x)$ à la forme (30) d'une manière simple, il le sera en partageant cette fonction en plusieurs autres. Il résulte de là le théorème suivant.

Théorème II. Si l'on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_{a_1}^{b_1} e^{-x\omega} F_1(\omega)\,d\omega + \int_{a_2}^{b_2} e^{-x\omega} F_2(\omega)\,d\omega + \cdots\cdots + \int_{a_n}^{b_n} e^{-x\omega} F_n(\omega)\,d\omega \quad (47)$$

où $f(x)$, $F_1(x)$, $\cdots$ $F_n(x)$ *sont des fonctions quelconques de* x; β, a_1 b_1 $\cdots$ a_n, b_n *des constantes quelconques, on la satisfait en prenant pour* $\varphi(x)$ *la fonction.*

$$\varphi(x) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{F_1(\omega)\,e^{-x\omega}\,d\omega}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\theta\omega} f(\theta)\,d\theta} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{F_2(\omega)\,e^{-x\omega}\,d\omega}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\theta\omega} f(\theta)\,d\theta} + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} \frac{F_n(\omega)\,e^{-x\omega}\,d\omega}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\theta\omega} f(\theta)\,d\theta} \quad (48)$$

XI.

La fonction

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{hm\theta} f(\theta)\,d\theta}, \quad (49)$$

en égard au théorème (19), pouvant toujours être mise sous la forme

$$\int_{\gamma}^{\delta} f_1(\omega)\,e^{hm\omega}\,d\omega, \quad (50)$$

les équations (1), (30) et (31) fourniront le théorème suivant.

Théorème III. Si l'on a l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x); \quad (51)$$

où $f(x)$ *et* $F(x)$ *sont des fonctions quelconques de* x; α *et* β *des quantités indépendantes de* x *et* θ; *et l'on fait*

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,e^{hm\theta}\,d\theta} = \int_{\gamma}^{\delta} f_1(\omega)\,e^{hm\omega}\,d\omega, \quad (52)$$

on pourra toujours la satisfaire en prenant pour $\varphi(x)$ *la fonction*

$$\varphi(x) = \int_{\lambda}^{\delta} f_1(\omega)\,F(x+\omega)\,d\omega. \quad (53)$$

Ainsi selon qu'il serait plus facile de mettre la fonction $F(x)$ sous la forme (30) ou la fonction (49) sous la forme (50), on fera usage de la première expression que nous avons trouvée pour $\varphi(x)$, ou bien de celle que l'on vient d'écrire.

Quand on ne peut pas éxécuter l'une ou l'autre de ces transformations à l'aide d'une seule intégrale définie, il faut avoir recours au théorème de FOURIER. Il est trés-facile de passer des valeurs de $\varphi(x)$ que nous avons données à celles que l'on déduirait de ce théorème. Ainsi dans la première valeur de $\varphi(x)$ nous n'avons qu'à faire

$$a = -\infty, \quad b = +\infty, \quad h = \sqrt{-1}, \quad F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi\omega\sqrt{-1}}\, F(\xi)\, d\xi, \tag{54}$$

pour trouver l'expresion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\omega(\xi-x)\sqrt{-1}}\, F(\xi)}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{\omega\theta\sqrt{-1}}\, f(\theta)\, d\theta}\, d\omega\, d\xi \tag{55}$$

à laquelle l'on serait arrivé directement.

XII.

La première méthode que nous avons donnée pour résoudre l'équation (1) exigeant le développement d'une fonction quelconque en série d'exponentielles, peut présenter quelque difficulté quand on ne veut pas se servir des méthodes ou des formules de FOURIER. La seconde métbode exigeant la réduction d'une fonction quelconque à la forme (30), ne conduit pas toujours à ces calculs très-simples. Pour ces raisons je vais en donner une troisième, qui sous le rapport de la simplicité ne laissera rien à désirer.

Développons $\varphi(x+\theta)$ par le théorème de Taylor, et faisons pour alléger

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots n}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\theta^n\, d\theta = f_1(n); \tag{56}$$

on aura

$$f_1(\theta)\,\varphi(x) + f_1(1)\,\frac{d\,\varphi(x)}{dx} + f_1(2)\,\frac{d^2\,\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} = F(x). \tag{57}$$

Maintenant différentiant plusieurs fois de suite cette équation,

$$\left.\begin{aligned} f_1(\theta)\,\frac{d\,\varphi(x)}{dx} + f_1(1)\,\frac{d^2\,\varphi(x)}{dx^2} + f_1(2)\,\frac{d^3\,\varphi(x)}{dx^3} + \text{etc.} &= F'(x) \\ f_1(\theta)\,\frac{d^2\,\varphi(x)}{dx^2} + f_1(1)\,\frac{d^3\,\varphi(x)}{dx^3} + f_1(2)\,\frac{d^4\,\varphi(x)}{dx^4} + \text{etc.} &= F''(x) \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

et éliminant alternativement les dérivées successives de $\varphi(x)$, on arrivera à un résultat de la forme

$$\varphi(x) = A_0\,F(x) + A_1\,F'(x) + A_2\,F''(x) + \text{etc.} \tag{59}$$

Cependant, comme les quantités A_0, A_1, A_2 etc., indépendantes de x, ne dépendent pas aussi de la nature de la fonction $\varphi(x)$ et $F(x)$, il s'ensuit qu'on peut les déterminer d'une manière générale, donnant des formes particulières à ces fonctions.

Pour cela faisons $\varphi(x) = e^{rx}$: l'équation (57) se réduit à

$$[f_1(0) + f_1(1)\,r + f_1(2)\,r^2 + \text{etc.}]\,e^{rx} = F(x) \tag{60}$$

et l'équation (59) donnant

$$\frac{1}{f_1(0) + f_1(1)\,r + f_1(2)\,r^2 + \text{etc}} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \text{etc.} \tag{61}$$

toute la difficulté de trouver A_0, A_1, A_2 etc. ou de résoudre le problème proposé, se réduit à développer

$$\frac{1}{f_1(0) + f_1(1)\,r + f_1(2)\,r^2 + \text{etc.}}, \tag{62}$$

suivant les puissances ascendantes de r.

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit

$$\varphi(x) - \frac{m}{1}\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \text{etc.} = F(x). \tag{63}$$

L'égalité précédente se réduisant à

$$\frac{1}{1 - \frac{m}{1}r + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}r^2 - \text{etc.}} = (1+r)^m = 1 + \frac{m}{1}r + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}r^2 + \text{etc.} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \text{etc.} \tag{64}$$

on aura pour déterminer $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = F(x) + \frac{m}{1}F'(x) + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}F''(x) + \text{etc.}: \tag{65}$$

mais comme, en vertu du théorème de Leibnitz,

$$\frac{d^m(e^x r)}{dx^m} = e^x\left[r + \frac{m}{1}\frac{dr}{dx} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{d^2 r}{dx^2} + \text{etc.}\right]; \tag{66}$$

l'expression précédente peut s'écrire d'une manière beaucoup plus simple comme suit

$$\varphi(x) = e^{-x}\frac{d^m[e^x F(x)]}{dx^m}. \tag{67}$$

Si l'on partait de l'équation

$$\int_0^\infty \sin a\theta\, \varphi(x-\theta)\, d\theta = F(x) \tag{68}$$

l'égalité (64) se réduisant à

$$\frac{1}{\int_0^\infty \sin\theta a\left[1 - \frac{r\theta}{1} + \frac{(r\theta)}{1\cdot 2} - \text{etc.}\right]d\theta} = \frac{1}{\int_0^\infty \sin a\theta e^{-\theta r}\, d\theta} = \frac{a^2+r^2}{a} = a + \frac{1}{a}r = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \text{etc.} \tag{69}$$

en égard à la formule comme

$$\int_0^\infty e^{-\theta r}\sin\theta r\, d\theta = \frac{a^2+r^2}{a}, \tag{70}$$

fait voir que $A_0 = a$, $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{a}$, et que toutes les autres constantes A_3, A_4 etc., sont nulles. L'égalité (59) donnera alors pour determiner $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = a\,F(x) + \frac{1}{a}\frac{dF(x)}{dx} \tag{71}$$

Dans cette solution toutes les constantes $f_1(0)$, $f_1(1)$ etc., sont infinies, mais la somme des quantités dans laquelle elles entrent ne l'étant pas, il n'en résulte aucune erreur; ainsi qu'on peut le faire voir partant de cette expression de $\varphi(x)$.

Nous avions déjà trouvé, dans les pages antérieures, que, en supposant

$$F(x) = \int_a^b e^{-x\omega} F_1(\omega)\, d\omega \tag{72}$$

la valeur de $\varphi(x)$ qui satisfaisait à l'équation (68) était

$$\varphi(x) = \int_a^b \left(a + \frac{1}{a}\omega^2\right) F_1(\omega)\, e^{-x\omega}\, d\omega. \tag{73}$$

Mais

$$a\int_b^b F_1(\omega)\, e^{-x\omega}\, d\omega = a\, F(x); \tag{74}$$

et

$$\int_a^b \omega^2 F_1(\omega)\, e^{-x\omega}\, d\omega = \frac{d^2}{dx^2}\int_a^b F_1(\omega)\, e^{-x\omega}\, d\omega = \frac{d^2 F(x)}{dx^2}: \tag{75}$$

nous aurons donc exactement la même chose que nous venons de trouver. Plusieurs des formules (46) peuvent être simplifiées comme celle dont nous venons de nous occuper.

XIII.

De l'équation

$$f_1(0)\,\varphi(x) + f_1(1)\frac{d\varphi(x)}{dx} + f_1(2)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.} = F(x), \tag{76}$$

on tire, par la théorie de la séparation des symboles

$$\varphi(x) = \frac{1}{f_1(0) + f_1(1)\frac{d}{dx} + f_1(2)\frac{d^2}{dx^2} + \text{etc.}} \cdot F(x). \tag{77}$$

Faisant maintenant

$$\frac{1}{f_1(0) + f_1(1)\frac{d}{dx} + f_1(2)\frac{d^2}{dx^2} + \text{etc.}} = A_0 + A_1\frac{d}{dx} + A_2\frac{d^2}{dx^2} + \text{etc.}, \tag{78}$$

on aura, d'après cette théorie,

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 F'(x) + A_2 F''(x) + \text{etc.} \tag{79}$$

pour la valeur de $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation proposée. Or, dans les dernières pages nous avons trouvé la même valeur de $\varphi(x)$ pour satisfaire à l'équation (76); donc cette opération de caractéristiques se trouve démontrée; et d'une manière très-simple. Il est évident que ce que nous venons de faire s'applique tant aux équations dont l'ordre est fini qu'à celles dont l'ordre est indéfini.

Dans un autre Mémoire, je démontrerai au moyen d'un algorithme simple et expéditif, tous les théorèmes que l'on démontre ordinairement à l'aide de la théorie des caractéristiques, algorithme qui étant plus rigoureux a toutefois les mêmes avantages par rapport à la concision.

XIV.

M. Cauchy a prouvé (Exercices de Mathématique, T. I, p. 112) que si la fonction $f(z)$, monodrome et monogène, conserve une valeur finie pour les valeurs infinies réelles ou imaginaires de la variable z z, et si l'on désigne pas a_1, a_2, a_3, etc. les différentes racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0, \tag{80}$$

et par $f_1(a_n)$ ce que devient $(z - a_n) f(z)$ quand on pose $z = a_n$, on aura

$$f(x) = \frac{f_1(a_1)}{x - a_1} + \frac{f_1(a_2)}{x - a_2} + \frac{f_1(a_2)}{x - a_3} + \text{etc.}; \tag{81}$$

pourvu que la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ change de signe, sans changer de valeur numérique, quand on passe de la supposition $x = -\infty$, à la supposition $x = \infty$, ou bien de la supposition $y = -\infty$, à la supposition $y = \infty$.

Cela posé, admettons que la fonction

$$\int_\alpha^\beta e^{r\theta} f(\theta)\, d\theta \tag{82}$$

soit monodrome et monogène, c'est-à-dire, qu'elle n'ait qu'une seule valeur ainsi que sa dérivée pour chaque valeur de r, et qu'elle s'évanouisse pour des valeurs infinies de r, positives ou négatives. On aura, en vertu du théorème que nous venons de citer,

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{r\theta} f(\theta)\, d\theta} = \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{\gamma_1\theta} f(\theta)\, \theta\, d\theta} \frac{1}{r - \lambda_2} + \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{\gamma_2\theta} f(\theta)\, \theta\, d\theta} \frac{1}{r - \gamma_2} + \text{etc.}; \tag{83}$$

si l'on désigne par γ_1, γ_2, etc. les racines de l'équation

$$\int_\alpha^\beta e^{r\theta} f(\theta)\, d\theta = 0. \tag{84}$$

De l'autre coté l'équation (61) pouvant être mise sous la forme

$$\frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{r\theta} f(\theta)\, d\theta} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \text{etc.}, \tag{85}$$

en vertu de l'égalité (56), il s'en suit qu'en développant les différents termes du second membre de l'équation (83) suivant les puissances ascendentes de r, les coefficients des différentes puissances de cette variable donneront les quantités A_0, A_1, A_2, etc.

Développant donc chacune des fractions $\frac{1}{r - \gamma_n}$ selon les puissances entières de r, on aura

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{r\theta} f(\theta)\, d\theta} = {} & \frac{1}{\lambda_1 \int_\alpha^\beta e^{x\theta}\, \theta f(\theta)\, d\theta} \left[1 + \frac{r}{\lambda_1} + \frac{r^2}{\lambda_1^2} + \text{etc.}\right] \\ & + \frac{1}{\lambda_2 \int_\alpha^\beta e^{\lambda_2\theta} f\theta(\theta)\, d\theta} \left[1 + \frac{r}{\lambda_2} + \frac{r^2}{\lambda_2^2} + \text{etc.}\right] \\ & + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Dans ce développement le terme indépendant de r, et les coefficients successifs de r sont les quantités désignées dans l'équation (85) par A_0, A_1, A_2 etc.

Portant alors les valeurs qu'on en déduit pour A_0, A_1, A_2 etc., à l'équation (59) on voit qu'elle peut s'écrire ainsi qu'il suit

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) = &-\frac{1}{\lambda_1\int_\alpha^\beta e^{\lambda_1\theta} f(\theta)\,\theta\,d\theta}\left[F(x)+\frac{1}{\lambda_1}F'(x)+\frac{1}{\lambda_1^2}F''(x)+\text{etc.}\right]\\ &-\frac{1}{\lambda_2\int_\alpha^\beta e^{\lambda_2\theta} f(\theta)\,\theta\,d\theta}\left[F(x)+\frac{1}{\lambda_2}F'(x)+\frac{1}{\lambda_2^2}F''(x)+\text{etc.}\right]\\ &-\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{\lambda_1\theta} f(\theta)\,\theta\,d\theta} e^{\lambda_1 x}\int e^{-\lambda_1 x} f(x)\,dx + \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{\lambda_2\theta} f(\theta)\,\theta\,d\theta} e^{\lambda_2 x}\int e^{-\lambda_2 x} F(x)\,dx + \text{etc.} \quad (88)$$

en vertu du théorème de LEIBNITZ.

Cette expression est la même qu'on trouve par les méthodes ordinaires pour l'intégrale de l'équation (77) quand elle est d'un ordre fini: la solution précédente s'applique au cas où elle est finie aussi bien qu'à celui où elle est infinie.

XV.

Les méthodes que nous venons d'exposer pour résoudre l'équation (1) peuvent être étendues à l'équation plus générale

$$\Pi\varphi(x) + \int_{\alpha'}^{\beta_1} f_1(\theta)\,\Pi_1\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(\theta)\,\Pi_1\,\varphi(x+\theta)\,d\theta + \text{etc.} = F(x); \quad (89)$$

où l'on désigne pas Π, Π_1, Π_2, etc. les fonctions quelconques de θ et des caractéristiques D ou $\frac{d}{dx}$ $\int$, Δ et Σ, définies par les équations

$$\Pi_n = f\left(n, \theta, \text{etc. etc.}, \int, \Delta, \Sigma\right); \quad (90)$$

$$\Pi = f_0\left(\text{etc.}, \int, \Delta, \Sigma\right). \quad (91)$$

En effet, si l'on applique à cette équation la méthode du N° VI il sera facile de démontrer le théorème suivant.

Théorème IV. Si l'on a l'équation

$$\Pi\varphi(x) + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1(\theta)\,\Pi_1\,\varphi(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(\theta)\,\Pi_2\,\Pi(x+\theta)\,d\theta + \text{etc.} = F(x); \quad (92)$$

où $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, *etc. sont des fonctions quelconques de* θ; $F(x)$ *une fonction aussi quelconque de* x;

α_1, β_1, α_2, β_2, *etc. des constantes;* Π, Π_1, Π_2, *etc. des fonctions de* θ *et des caractéristiques* D, f, Δ *et* Σ, *définies par les équations* (90) *et* (94), *on pourra la satisfaire en prenant pour* $\varphi(x)$ *la fonction*

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{e^{h\omega x} F_1(\omega)}{{}_1F(\omega)}\, d\theta, \tag{93}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$f_0\left(h\omega, \frac{1}{h\omega}, e^{h\omega}-1, \frac{1}{e^{h\omega}-1}\right) + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{h\theta\omega} f_1(\theta) f\left(1, \theta, h\omega, \frac{1}{h\omega}, e^{h\omega}-1, \frac{1}{e^{h\omega}-1}\right) d\theta$$
$$+ \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{h\omega\theta} f_2(\theta) f\left(2, \theta, h\omega, \frac{1}{h\omega}, e^{h\omega}-1, \frac{1}{e^{h\omega}-1}\right) d\theta + \text{etc.} = {}_1F(\omega); \tag{94}$$

et si l'on pose

$$F(x) = \int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega. \tag{95}$$

XVI.

Les différentes méthodes que nous avons données pour résoudre l'équation (1) s'appliquent sans la moindre difficulté à la solution de l'équation (2). Ainsi en développant $F(x)$ par le théorème de Maclaurin, il est clair que l'on pourra satisfaire à cette équation en prenant pour $\varphi(x)$ la fonction

$$\varphi(x) = \frac{F(\theta)}{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta} + \frac{F'(\theta)}{\int_\alpha^\beta \theta f(\theta)\, d\theta}\,\frac{x}{1} + \frac{F''(\theta)}{\int_\alpha^\beta 0 f(\theta)\, d\theta}\,\frac{x^2}{1\cdot 2} + \text{etc.} \tag{96}$$

On pourra aussi très facilement démontrer le théorème suivant.

Théorème V. Si l'on a l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\, \varphi(\theta x)\, d\theta = F(x); \tag{97}$$

où f(x), F(x) *sont deux fonctions quelconques données de* x; α *et* β *deux constants; on pourra toujours la satisfaire en prenant pour* $\varphi(x)$ *la fonction*

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{x^{h\omega} F_1(\omega)}{\int_\alpha^\beta \theta^{h\omega} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega, \tag{98}$$

si l'on pose

$$F(x) = \int_a^b x^{h\omega} F_1(\omega)\, d\omega; \tag{99}$$

ou bien

$$\varphi(x) = \int_\gamma^\delta f_1(\omega)\, F(\omega x)\, d\omega, \tag{100}$$

si l'on fait

$$\frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} \theta^{h\omega} f(\theta)\, d\theta} = \int_{\xi^{h\omega}}^{\delta} f_1(\xi)\, d\xi. \tag{101}$$

Ce théorème suppose que l'on peut mettre une fonction quelconque $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = \int_{a}^{b} x^{h\omega} F_1(\omega)\, d\omega. \tag{102}$$

Or cela est toujours possible, car faisant $lx = z$ la fonction $F(x)$ deviendra $F(e^z)$ et d'après le théorème (30) on pourra toujours poser l'égalité

$$F(e^z) = \int_{a}^{b} e^{h\omega z} F_1(\omega)\, d\omega; \tag{103}$$

en mettant à la place de z sa valeur on retombe de suite sur l'équation (102).

Quand il n'est pas possible d'exécuter la transformation (99) ou (101) au moyen d'une seule intégration définie, on doit avoir recours au théorème de FOURIER, qui donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\omega\xi} F(e^{\xi})\, x^{\omega\sqrt{-1}}}{\int_{\alpha}^{\beta} \theta^{\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega\, d\xi, \tag{104}$$

pour la valeur de la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (2).

XVII.

Les mêmes méthodes conduisent encore facilement à la solution de l'équation plus générale

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1(\theta)\, \varphi(\theta x)\, d\theta + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(\theta)\, \varphi(\theta x)\, d\theta + \text{etc.} \\ &+ \int_{{}_1\alpha_1}^{{}_1\beta_2} {}_1f_1(\theta)(\theta x)\, \varphi'(\theta x)\, d\theta + \int_{{}_1\alpha_2}^{{}_1\beta_2} {}_1f_2(\theta)(\theta x)\, \varphi'(\theta x)\, d\theta + \text{etc.} \\ &+ \int_{{}_2\alpha_1}^{{}_2\beta_1} {}_2f_1(\theta)(\theta x)^2 \varphi''(\theta x)\, d\theta + \int_{{}_2\alpha_2}^{{}_2\beta_2} {}_2f_2(\theta)(\theta x)^2 \varphi''(\theta x)\, d\theta + \text{etc.} \\ &\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\} = F(x); \tag{105}$$

ainsi qu'il est facile de voir sans qu'on ait besoin d'aucune explication.

XVIII.

Un théorème donné par M. TCHEBICHEF dans le tome VIII du Journal de M. LIOUVILLE, et dont il sera question dans la suite de ce Mémoire, va nous permettre de donner une nouvelle solution des équations

$$\varphi(x) = F(x) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta, \tag{106}$$

$$\varphi(x) = F(x) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\varphi(x\theta)\,d\theta; \tag{107}$$

qui sont comprises comme des cas particuliers dans d'autres plus générales dont nous avons antérieurement tracé la solution.

Occupons-nous premièrement de la première de ces équations.

Remplaçons la variable θ par θ_1 et mettons y après $x+\theta$ à la place de x; on aura

$$\varphi(x+\theta) = F(x+\theta) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta_1)\,\varphi(x+\theta+\theta_1)\,d\theta_1. \tag{108}$$

Si l'on porte maintenant cette valeur de $\varphi(x+\theta)$ dans la même équation, elle deviendra

$$\varphi(x) = F(x) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,F(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,f_1(\theta)\,\varphi(x+\theta_1+\theta_1)\,d\theta\,d\theta. \tag{109}$$

Mettant de nouveau $x+\theta+\theta_1$ dans l'équation proposée après avoir remplacé θ par θ_2, on aura

$$\varphi(x+\theta+\theta_1) = F(x+\theta+\theta_1) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta_2)\,\varphi(x+\theta+\theta_1+\theta_2)\,d\theta_2; \tag{110}$$

ce qui transforme l'équation précédente en

$$\begin{aligned}\varphi(x) = F(x) &+ \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,F(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,f(\theta_1)\,F(x+\theta+\theta_1)\,d\theta\,d\theta, \\ &+ \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,f(\theta_1)\,f(\theta_2)\,\varphi(x+\theta+\theta_1+\theta_2)\,d\theta\,d\theta_1\,d\theta_2.\end{aligned} \tag{111}$$

En poursuivant les calculs suivant toujours la même marche, on arrivera à un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\varphi(x) = F(x) &+ \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,F(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,f(\theta_1)\,F(x+\theta+\theta_1)\,d\theta\,d\theta, \\ &+ \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,f(\theta_1)\,f(\theta_2)\,F(x+\theta+\theta_1+\theta_2)\,d\theta\,d\theta_1\,d\theta_2 + \text{ etc.}\end{aligned} \tag{112}$$

Pour trouver maintenant la fonction dont le second membre est le développement il faut transformer chacun des termes de cette série à l'aide du théorème cité de M. Tchebichef, et qui consiste à remplacer F par sa valeur donnée par le théorème de Fourier.

Par ce moyen, le terme

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,f(\theta_1)\,f(\theta_2)\,F(x+\theta+\theta_1+\theta_2)\,d\theta\,d\theta_1\,d\theta_2 \tag{113}$$

deviendra

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,e^{\theta\alpha\sqrt{-1}}\,d\theta \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta_1)\,e^{\theta_1\alpha\sqrt{-1}}\,d\theta \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta_2)\,e^{\theta_2\alpha\sqrt{-1}}\,d\theta\right] d\alpha; \tag{114}$$

ou

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\,[\psi(\alpha)]^3\,d\alpha, \tag{115}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,e^{\alpha\theta\sqrt{-1}}\,d\theta = \psi(\alpha). \tag{116}$$

Exécutant la même transformation pour les autres termes de la même série, il en résultera

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) = F(x) &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\,F(u)\,[\psi(\alpha)]\,du\,d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\,F(u)\,[\psi(\alpha)]^2\,du\,d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\,F(u)\,[\psi(\alpha)]^3\,du\,d\alpha + \text{etc.};\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

ou

$$\varphi(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\,F(u)\,\psi(\alpha)}{1-\psi(\alpha)}\,du\,d\alpha. \tag{118}$$

Si l'on y met au lieu de $\psi(\alpha)$ sa valeur, on aura définitivement

$$\varphi(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(u-x)\sqrt{-1}}\,F(u)\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha\theta\sqrt{-1}}\,f(\theta)\,d\theta}{1-\int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta\alpha\sqrt{-1}}\,f(\theta)\,d\theta}\,du\,d\alpha. \tag{119}$$

Si au lieu de se servir du théorème de Fourier pour transformer les termes de la suite (112), on exécutait cette transformation à l'aide du théorème (19), il est évident qu'on aurait trouvé

$$\varphi(x) = F(x) + \int_{a}^{b} e^{h\omega x}\,F_1(\omega)\,\frac{\int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta\omega}\,f(\theta)\,d\theta}{1-\int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta\omega}\,f(\theta)\,d\theta}\,d\omega, \tag{120}$$

pour la fonction qui satisfait à l'équation (106).

XVIII.

On peut démontrer à postériori que ces expressions que l'on vient de trouver pour $\varphi(x)$ vérifient l'équation proposée.

En effet, en y substituant la valeur de $\varphi(x)$ donnée par l'équation (120), on aura

$$\left.\begin{aligned} F(x) + \int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega) \frac{\int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}{1 - \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega &= F(x) + \int_\alpha^\beta f(x)\, F(x+\theta)\, d\theta \\ + \int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta \int_a^b e^{h\omega(x+\theta)} F_1(\omega) \frac{\int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}{1 - \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega. \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

Mettant dans cette équation à la place de $F(x+0)$ sa valeur

$$\int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega, \quad (122)$$

la somme des deux derniers termes du second membre, en intervertissant l'ordre des intégrations, deviendra

$$\int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega \left[\int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta + \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta \cdot \frac{\int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}{1 - \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta} \right]; \quad (123)$$

ou

$$\int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega \frac{\int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}{1 - \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}; \quad (124)$$

et fera voir de suite que cette équation est identique.

Si l'on prend l'autre expression de $\varphi(x)$ pour la substituer dans la même équation, et si l'on remplace après $F(x+\theta)$ par sa valeur donnée par la formule de FOURIER, il est aussi facile de voir qu'elle sera satisfaite.

Ainsi quoique ces expressions de $\varphi(x)$ aient été obtenues en passant par la suite (112) et semblent, en conséquence, ne subsister que pour les formes de la fonction $f(\theta)$ qui la rendent convergente, cependant on voit qu'il n'en est pas ainsi, mais qu'elle subsiste pour toutes les formes possibles de cette fonction.

Cela nous permet d'énoncer sans aucune restriction le théorème suivant.

Théorème VI. Si l'on a l'équation

$$\varphi(x) = F(x) + \int_\alpha^\beta f(\theta)\, \varphi(x+\theta)\, d\theta; \quad (125)$$

où $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ *et* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *sont deux fonctions quelconques de* x; α *et* β *deux constantes, on peut la satisfaire en prenant pour* $\varphi(\mathrm{x})$ *la fonction*

$$\varphi(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v(u-x)} F(u) \int_\alpha^\beta e^{\theta v\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta}{1 - \int_\alpha^\beta e^{\theta v\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta}\, du\, dv; \quad (126)$$

ou bien

$$\varphi(x) = F(x) + \int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega) \frac{\int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}{1 - \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega \tag{127}$$

si l'on a

$$F(x) = \int_a^b e^{h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega. \tag{128}$$

Il est facile de démontrer un théorème analogue relativement à l'équation (107).

XIX.

Dans les différentes méthodes que nous avons données pour résoudre les équations (1), (2) et d'autres du même genre, on s'est contenté de trouver une fonction propre à les satisfaire. Voici comment on peut rendre ces solutions plus générales.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agit de l'équation (1). Posons

$$\varphi(x) = \psi(x) + \Psi(x):$$

cette équation deviendra

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\, \psi(x+\theta)\, d\theta + \int_\alpha^\beta f(\theta)\, \Psi(x+\theta)\, d\theta = F(x): \tag{130}$$

et si l'on détermine $\psi(x)$ par l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\, \psi(x+\theta)\, d\theta = F(x), \tag{131}$$

elle se réduira à

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\, \Psi(x+\theta)\, d\theta = 0. \tag{132}$$

L'équation (131), étant de la même forme que l'équation (1) doit être traitée de la même manière: c'est donc de la dernière équation qu'il faut nous occuper.

On la satisfait si l'on prend pour $\Psi(x)$ la simple fonction

$$\Psi(x) = C\, e^{mx}; \tag{133}$$

pourvu que m soit une racine de l'équation

$$\int_\alpha^\beta e^{m\theta} f(\theta)\, d\theta = 0; \tag{134}$$

C une constante arbitraire.

Si l'on met dans cette expression de $\Psi(x)$ à la place de m toutes les racines de l'équation (134), en prenant d'autres constantes arbitraires, on aura autant de fonctions particulières satisfaisant à la même équation (132), et la somme de ces fonctions, attendu sa forme linéaire, la satisfaisant également, il en résulte

$$\Psi(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \text{etc.} \tag{135}$$

Ajoutant cette fonction aux différentes expressions que nous avons trouvées dans les pages antérieures pour satisfaire à l'équation (1), on aura l'expression la plus générale qui pourra la satisfaire. Ainsi cette fonction sera

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{e^{h\omega x} F_1(\omega)}{\int_\alpha^\beta e^{h\omega\theta} f(\theta)\, d\theta}\, d\omega + C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \text{etc.} \tag{136}$$

On peut de même rendre plus générales les solutions de l'équation (2) et des autres dont nous sommes occupés.

XX.

Passons maintenant au problème

$$\int_\alpha^\beta [f(\theta) + x f_1(\theta)]\, \varphi(x+\theta)\, d\theta = F(x). \tag{137}$$

Posons

$$\varphi(x) = \int d\omega \int e^{-h\xi x}\, \Theta(\xi, \omega)\, d\xi; \tag{138}$$

$\Theta(\xi, \omega)$ étant une fonction de ξ et ω qu'il s'agit de déterminer ainsi que les limites des intégrales, qui peuvent être supposées indépendantes de x.

Substituant cette valeur de $\varphi(x)$ et transformant $F(x)$ par le théorème (19), on aura

$$\int d\omega \int e^{-h\xi x} \left[\Theta(\xi, \omega) \int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f(\theta)\, d\theta + x\, \Theta(\xi, \omega) \int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f_1(\theta)\, d\theta\right] d\xi = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega; \tag{139}$$

ou

$$\int d\omega \int e^{-h\xi x} \Theta(\xi, \omega)\, d\xi \int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f(\theta)\, d\theta - \frac{1}{h} \int d\omega \int \Theta(\xi, \omega)\, d\xi \frac{d \cdot e^{-h\xi x}}{d\xi} \int_\alpha^\beta e^{-\xi\theta} f_1(\theta)\, d\theta = \int_\alpha^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega. \tag{140}$$

L'intégration par parties transforme cette équation en

$$\left.\begin{aligned} &\int d\omega \int e^{-\xi x} \left[\Theta(\xi, \omega) \int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f(\theta)\, d\theta + \frac{d \cdot \Theta(\xi, \omega) \int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f_1(\theta)\, d\theta}{h\, d\xi}\right] d\xi \\ &- \frac{1}{h} \int d\omega\, e^{-h\xi x}\, \Theta(\xi, \omega) \int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f_1(\theta)\, d\theta = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega; \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

dans la partie du premier membre n'ayant qu'une seule intégration, la variable ξ devant être prise entre deux limites que nous déterminerons tout à l'heure

Si l'on détermine $\Theta(\xi, \omega)$ par l'équation

$$\Theta(\xi,\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f(\theta)\,d\theta + \frac{d\cdot\Theta(\xi,\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta}{h\,d\xi} = 0, \tag{142}$$

il ne reste qu'à satisfaire à l'égalité

$$-\frac{1}{h}\int d\omega\, e^{-h\xi x}\,\Theta(\xi,\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega; \tag{143}$$

ce qu'on fera en prenant les deux intégrales entre des limites convenables, ainsi qu'on va le voir. L'équation (142) étant linéaire et du premier ordre, on sait comment trouver son intégrale.

Supposons qu'elle ait été déterminée; et désignons la par

$$\Theta(\xi,\omega) = C\psi(\xi); \tag{144}$$

ou plutôt par

$$\varphi(\xi,\omega) = \psi_1(\omega)\,\psi(\xi), \tag{145}$$

parceque la constante dans le cas actuel doit être une fonction de ω.

L'équation (143) deviendra

$$\frac{1}{h}\int d\omega\, e^{-h\omega x}\psi_1(\omega)\psi(\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f_1(\theta)\,d\theta = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega, \tag{146}$$

si l'on prend la variable ξ depuis ω jusqu'à une valeur l, racine de l'équation

$$e^{-h\xi x}\psi(\xi)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta = 0: \tag{147}$$

et deviendra identique si nous déterminons $\psi_1(\omega)$ par l'égalité

$$\frac{1}{h}\psi_1(\omega)\psi(\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f_1(\theta)\,d\theta = F_1(\omega), \tag{148}$$

et prenons l'intégrale du premier membre entre les limites a et b.

On aura donc

$$\varphi(x) = \int_a^b d\omega \int_\omega^l e^{-h\xi x}\frac{b\,F_1(\omega)\,\psi(\xi)}{\psi(\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f_1(\theta)\,d\theta}\,d\xi \tag{149}$$

pour la fonction qui vérifie l'équation proposée (136).

Il est aisé de voir que la valeur de $\psi(\xi)$ déduite des équations (142), (143) et (144), est égale à

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta}\, e^{-h\int \frac{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta}{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f(\theta)\,d\theta}\,d\xi}. \tag{150}$$

Pour donner une solution plus générale de cette équation, représentons par g_1, g_2, g_3, etc., k_1, k_2, k_3, etc. les racines de l'équation (147). Il est évident qu'on pourra prendre pour $\varphi(x)$ la fonction plus générale

$$\varphi(x) = C_1\int_{g_1}^{k_1} e^{-h\xi x}\psi(\xi)\,d\xi + C_2\int_{g_2}^{k_2} e^{-h\xi x}\psi(\xi)\,d\xi + C_3\int_{g_3}^{k_3} e^{-h\xi x}\psi(\xi)\,d\xi + \text{etc.}$$
$$+ \int_a^b d\omega \int_\omega^l e^{-h\xi x}\frac{h F_1(\omega)\psi(\xi)}{\psi(\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f_1(\theta)\,d\theta}\,d\xi; \tag{151}$$

où C_1, C_2, C_3, etc. sont des constantes arbitraires. On voit cela en faisant attention à ce que $\Theta(\xi, \omega)$ est de la forme $\psi_1(\omega)\psi(\xi)$, et que, par conséquent, l'intégrale relative à ω peut être confondue avec les constantes arbitraires.

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème VII. Si l'on a l'équation

$$\int_\alpha^\beta [f(\theta) + x f_1(\theta)]\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega \tag{152}$$

où $f(x)$, $f_1(x)$, $F(x)$ *sont trois fonctions quelconques de* x; α *et* β *deux constantes; la valeur la plus générale que l'on peut prendre pour* $\varphi(x)$ *est égale à la fonction*

$$\varphi(x) = C_1\int_{g_1}^{k_1} e^{-h\xi x}\psi(\xi)\,d\xi + C_2\int_{g_2}^{k_2} e^{-h\xi x}\psi(\xi)\,d\xi + C_3\int_{g_3}^{k_3} e^{-h\xi x}\psi(\xi)\,d\xi + \text{etc.}$$
$$+ \int_a^b d\omega \int_\omega^l e^{-h\xi x}\frac{h F_1(\omega)\psi(\xi)}{\psi(\omega)\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\omega} f_1(\theta)\,d\theta}\,d\xi, \tag{153}$$

où $\psi(\xi)$ *représente*

$$\frac{e^{-\int \Psi(\xi)\,d\xi}}{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta} \tag{154}$$

en y faisant, pour abréger,

$$\frac{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f(\theta)\,d\theta}{\int_\alpha^\beta e^{-h\theta\xi} f_1(\theta)\,d\theta} = \Psi(\xi); \tag{155}$$

C_1, C_2, C_3, *etc. des constantes arbitraires*; g_1, k_1; g_2, k_2; g_3, k_3; *etc. les différentes combinaisons que l'on peut former en prenant deux à deux toutes les racines de l'équation*

$$e^{-h\xi x}\psi(\xi)\int_\alpha^\beta e^{-h\xi\theta} f_1(\theta)\,d\theta = 0; \tag{156}$$

b *une racine quelconque de la même équation.*

XXI.

La solution de l'équation (136) se simplifie de beaucoup quand on peut développer $F(x)$ en suite convergente de la forme

$$F(x) = \Sigma F_1(m_n)\, e^{-m_n x}; \tag{157}$$

m_n étant une constante.

En effet, posons

$$\varphi(x) = \Sigma \int e^{-\omega x}\, \Omega_n\, d\omega; \tag{158}$$

Ω_n étant une fonction de ω et n qu'il s'agit de déterminer.

D'après ces suppositions, l'équation proposée deviendra

$$\Sigma \int e^{-\omega x} \left[\Omega_n \int e^{-\omega\theta} f(\theta)\, d\theta + x\, \Omega_n \int e^{-\omega\theta} f_1(\theta)\, d\theta \right] d\omega = \Sigma F(m_n)\, e^{-m_n x}; \tag{159}$$

et on pourra déterminer chacune des fonctions Ω_1, Ω_2, Ω_3, etc. séparément si l'on fait

$$\int e^{-\omega x} \left[\Omega_n \int e^{-\omega\theta} f(\theta)\, d\theta + x\, \Omega_n \int e^{-\omega\theta} f_1(\theta)\, d\theta \right] d\omega = F(m_n)\, e^{-m_n x}. \tag{160}$$

Cette équation traitée comme l'équation (139) du N° précédent conduit premièrement à

$$\Omega_n \int_\alpha^\beta e^{-\theta\omega} f(\theta)\, d\theta + \frac{d \cdot \Omega_n \int_\alpha^\beta e^{-\theta\omega} f_1(\theta)\, d\theta}{d\omega} = 0 \tag{161}$$

qui doit donner Ω_n; et si l'on désigne par $C_n \psi(\omega)$ la fonction qu'on en déduit pour cette variable, on aura après à satisfaire à l'équation

$$- C_n e^{-\omega x} \psi(\omega) \int_\alpha^\beta e^{-\theta\omega} f_1(\theta)\, d\theta = F(m_n)\, e^{-m_n x} \tag{162}$$

où la variable ω doit être prise entre deux limites convenables.

Ces limites sont évidemment m_n et l, l étant une racine quelconque de l'équation

$$e^{-\omega x} \psi(\omega) \int_\alpha^\beta e^{-\theta\omega} f_1(\theta)\, d\theta = 0: \tag{163}$$

et il ne restera pour satisfaire à cette équation qu'à déterminer la constante C_n par l'équation

$$C_n \psi(m_n) \int_\alpha^\beta e^{-m_n\theta} f_1(\theta)\, d\theta = F(m_n). \tag{164}$$

On aura donc

$$\Omega_n = C_n \int_\alpha^l e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega. \tag{165}$$

Si l'on désigne par g_1, k_1; g_2, k_2; g_3, k_3; etc. toutes les combinaisons que l'on peut former en prenant deux à deux toutes les racines de l'équation (163), il est évident que l'on peut encore prendre pour Ω_n la fonction plus générale

$$\Omega_n = C_n \int_{m_n}^{l} e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega + {}_1C_n \int_{g_1}^{k_1} e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega + {}_2C_n \int_{g_2}^{k_2} e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega + \text{etc.}; \quad (166)$$

${}_1C_n$, ${}_2C_n$, etc. étant des constantes arbitraires.

Cette fonction déterminée, l'équation (158) donne après, en changeant les constantes arbitraires

$$\varphi(x) = \Sigma\, C_n \int_{m_n}^{l} e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega + {}_1C \int_{g_1}^{k_1} e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega + {}_2C \int_{g_2}^{k_2} e^{-\omega x} \psi(\omega)\, d\omega + \text{etc.}, \quad (167)$$

pour la fonction inconnue qui résout le problème proposé.

Dans cette expression C_n est donné par l'équation (164), et la $\psi(\omega)$ se déduit de la fonction du second membre de l'équation (150) en y faisant $h = 1$ et en remplaçant ξ par ω.

XXII.

Soit l'équation

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\alpha_1}^{\beta_1} [f_1(\theta) + x\,{}^1f(\theta)]\,\varphi(x+\theta)\,d\theta + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [f_2(\theta) + x\,{}^2f(\theta)]\,\varphi(x+\theta)\,d\theta + \text{etc.}\\
&+ \int_{{}_1\alpha_1}^{{}_1\beta_1} [{}_1f_1(\theta) + x\,{}^1f^1(\theta)]\,\varphi'(x+\theta)\,d\theta + \int_{{}_2\alpha_2}^{{}_2\beta_2} [{}_1f_2(\theta) + x\,{}^2f^1(\theta)]\,\varphi'(x+\theta)\,d\theta + \text{etc.}\\
&+ \int_{{}_2\alpha_1}^{{}_2\beta_1} [{}_2f_1(\theta) + x\,{}^2f^1(\theta)]\,\varphi''(x+\theta)\,d\theta + \int_{{}_2\alpha_2}^{{}_2\beta_2} [{}_2f_2(\theta) + x\,{}^2f^2(\theta)]\,\varphi''(x+\theta)\,d\theta + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}\right\} = F(x) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega \quad (168)$$

où $f_1(\theta)$, ${}^1f(\theta)$, $f_2(\theta)$, etc. ${}_1f_1(\theta)$, ${}^1f^1(\theta)$, ${}_1f_2(\theta)$, etc. etc. sont des fonctions quelconques de θ; $F(x)$ une fonction quelconque de x, donnée comme les fonctions précédentes; α_1, β_1, α_2, etc. ${}_1\alpha_1$, ${}_1\beta_1$, ${}_1\alpha_2$, etc. etc. des constantes.

Pour l'intégrer, posons

$$\varphi(x) = \int d\omega \int e^{-h\xi x}\, \Theta(\xi, \omega)\, d\xi; \quad (169)$$

$\Theta(\xi, \omega)$ étant une fonction de ξ et ω à déterminer, ainsi que les limites des intégrales.

Substituant cette valeur de $\varphi(x)$ dans l'équation précédente et faisant, pour abréger,

$$\int_{m\alpha_1}^{m\beta_1} e^{-h\theta\xi}\, {}_mf_1(\theta)\, d\theta + \int_{m\alpha_2}^{m\beta_2} e^{-h\theta\xi}\, {}_mf_2(\theta)\, d\theta + \text{etc.} = f_{(m)}(\xi), \quad (170)$$

$$\int_{m\alpha_1}^{m\beta_1} e^{-h\theta\xi}\, {}^1f^m(\theta)\, d\theta + \int_{m\alpha_2}^{m\beta_2} e^{-h\theta\xi}\, {}^2f^m(\theta)\, d\theta + \text{etc.} = {}_{(m)}f(\xi), \quad (171)$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\int d\omega \int \Theta(\xi, \omega)\, [f_{(0)}(\xi) - f_{(1)}(\xi)\, h\xi + f_{(2)}(\xi)\, (h\xi)^2 - \text{etc.}]\, e^{-h\xi x}\, x\, d\xi\\
&+ \int d\omega \int \Theta(\xi, \omega)\, [{}^{(0)}f(\xi) - {}^{(1)}f(\xi)\, h\xi + {}^{(2)}f(\xi)\, (h\xi)^2 - \text{etc.}]\, e^{-h\xi x} x\, d\xi = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\, d\omega.
\end{aligned}\right\} \quad (172)$$

L'intégration par parties transforme cette équation en

$$\left.\begin{aligned}&\int d\omega \int d\xi \left\{ [f_{(0)}(\xi) - f_{(1)}(\xi) h\xi + f_{(2)}(\xi)(h\xi) - \text{etc.}]\,\Theta(\xi,\omega) \right.\\ &\left. + \frac{d\cdot\Theta(\xi,\omega)\,[{}^{(0)}f(\xi) - {}^{(1)}f(\xi) h\xi + {}^{(2)}f(\xi)(h\xi)^2 - \text{etc.}]}{h\,d\xi} \right\} e^{-h\xi x}\\ &-\frac{1}{h}\int d\omega\,[{}^{(0)}f(\xi) - {}^{(1)}f(\xi) h\xi + {}^{(2)}f(\xi)(h\xi)^2 - \text{etc.}]\,e^{-h\omega x}\,\Theta(\xi,\omega) = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega;\end{aligned}\right\} \quad (173)$$

dans la partie du premier membre où il n'y a qu'une seule intégration définie la variable ξ devant être prise entre des limites que nous allons déterminer tout à l'heure.

Pour satisfaire à cette équation, déterminons $\Theta(\xi,\omega)$ par l'égalité

$$\Theta(\xi,\omega)\,[f_{(0)}(\xi) - f_{(1)}(\xi) h\xi + f_{(2)}(\xi)(h\xi)^2 - \text{etc.}] + \frac{d\cdot\Theta(\xi,\omega)\,[{}^{(0)}f(\xi) - {}^{(1)}f(\xi) h\xi + {}^{(2)}f(\xi)(h\xi)^2 - \text{etc.}]}{h\,d\xi} = 0; \quad (174)$$

et comme elle se réduit à

$$-\frac{1}{h}\int d\omega\,[{}^{(0)}f(\xi) - {}^{(1)}f(\xi) h\xi + {}^{(2)}f(\xi)(h\xi)^2 - \text{etc.}]\,\Theta(\xi,\omega)\,e^{-h\xi x} = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega, \quad (175)$$

en représentant par $\Theta(\xi,\omega) = \Pi_1(\omega)\,\Pi(\xi)$, l'intégrale de l'équation (174), intégrale que l'on sait toujours déterminer, et où $\Pi_1(\omega)$ est une fonction arbitraire de ω, on la satisfait en prenant premièrement ξ entre les limites ω et l, l étant une racine quelconque de l'équation

$$\Pi(\xi)\,[{}^{(0)}f(\xi) - {}^{(1)}f(\xi) h\xi + {}^{(2)}f(\xi)(h\xi)^2 - \text{etc.}]\,e^{-h\xi x} = 0: \quad (176)$$

et comme elle deviendra

$$\frac{1}{h}\int d\omega\,\Pi_1(\omega)\,\Pi(\omega)\,[{}^{(0)}f(\omega) - {}^{(1)}f(\omega) h\omega + {}^{(2)}f(\omega)(h\omega)^2 - \text{etc.}]\,e^{-h\omega x} = \int_a^b e^{-h\omega x} F_1(\omega)\,d\omega \quad (177)$$

on n'a plus qu'à faire

$$\Pi_1(\omega) = \frac{h\,F_1(\omega)}{\Pi(\omega)\,[{}^{(0)}f(\omega) - {}^{(1)}f(\omega) h\omega + {}^{(2)}f(\omega)(h\omega)^2 - \text{etc.}]}; \quad (178)$$

et prendre a et b pour les limites de l'intégrale relative à ω.

On aura donc

$$\varphi(x) = \int_a^b d\omega \int_\omega^l e^{-h\xi x}\,\Pi_1(\omega)\,\Pi(\xi)\,d\xi \quad (179)$$

pour la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (168).

Désignant par g_1, k_1; g_2, k_2; g_3, k_3; etc. les différentes combinaisons que l'on peut faire en prenant deux à deux toutes les racines de l'équation (176), il est facile de voir qu'on peut prendre pour $\varphi(\omega)$ la fonction plus générale

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & C_1 \int_{g_1}^{k_1} e^{-h\xi x}\,\Pi(\xi)\,d\xi + C_2 \int_{g_2}^{k_2} e^{-h\xi x}\,\Pi(\xi)\,d\xi + \text{etc.}\\ & + \int_a^b d\omega \int_\omega^l e^{-h\xi x}\,\Pi_1(\omega)\,\Pi(\xi)\,d\xi;\end{aligned} \quad (180)$$

où C_1, C_2, etc. sont des constantes arbitraires.

XXIII.

Si l'on désigne maintenant par Π_1, Π_2, Π_3, etc. des caractéristiques définies par l'équation (90), on pourra encore à l'aide de ce qui précède déterminer aisément la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}[f_1(\theta)+x^1 f(\theta)]\,\Pi_1\varphi(x+\theta)\,d\theta+\int_{\alpha_2}^{\beta_2}[f_2(\theta)+x^2 f(\theta)]\,\Pi_2\varphi(x+\theta)\,d\theta+\text{etc.}=F(x). \quad (181)$$

Les problèmes que nous venons de résoudre sont relativement au problème général

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \quad (182)$$

où $f(x,\theta)$ est une fonction quelconque de x et θ, ce que les équations

$$a_0 y + b_0\frac{dy}{dx} + c_0\frac{d^2y}{dx^2}+\text{etc.} = F(x), \quad (183)$$

$$a_0 y + b_0 x\frac{dy}{dx} + c_0 x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\text{etc.} = F(x), \quad (184)$$

$$(a_0+a_1 x)y + (b_0+b_1 x)\frac{dy}{dx} + (c_0+c_1 x)\frac{d^2y}{dx}+\text{etc.} = F(x), \quad (185)$$

sont relativement à l'équation générale d'un ordre quelconque

$$X_0 y + X_1\frac{dy}{dx} + X_2\frac{d^2y}{dx^2}+\text{etc.} = F(x), \quad (186)$$

dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x.

On peut ajouter qu'ils n'en sont pas moins importants ainsi qu'on pourra le juger d'après les applications qu'on en fera dans la suite de ce Mémoire.

Je dois aussi observer que si de l'équation (181) où les coefficients de la fonction $\varphi(x)$ sont des polynomes du premier degré en x, on trouve pour déterminer $\Theta(\xi,\omega)$ une équation linéaire du premier ordre et du premier dégré, de l'équation analogue

$$\Sigma\int_{\alpha_n}^{\beta_n}[{}_nf_1(\theta)+x\,{}_nf_1(\theta)+\cdots+x^m\,{}_nf_m(\theta)]\,\Pi_n\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \quad (187)$$

ou posant toujours

$$\varphi(x) = \int d\omega\int e^{-h\xi x}\,\Theta(\xi,\omega)\,d\xi, \quad (188)$$

et exécutant la même transformation, on trouvera pour déterminer $\Theta(\xi,\omega)$ une équation qui sera encore linéaire, mais de l'ordre m.

XXIV.

Passons au problème (4).

Faisons

$$\varphi(\theta x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{\theta x}{1} + \varphi''(0)\frac{(\theta x)^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}, \quad (189)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\theta)\,\theta^n}{1\cdot 2\cdots n}\,d\theta = f_2(n), \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f_1(\theta)\,\theta^n}{1\cdot 2\cdots n}\,d\theta = f_3(n); \tag{190}$$

l'équation proposée prendra la forme

$$[f_2(0) + f_3(0)\,x]\,\varphi(0) + [f_2(1) + f_3(1)\,x]\,\varphi'(0) + [f_2(2) + f_3(2)\,x]\,\varphi''(0) + \text{etc.} = F(x). \tag{191}$$

Divisons maintenant $F(x)$ en deux parties et faisons

$$\psi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{etc.}, \tag{192}$$

$$\frac{F(x) - \psi(x)}{x} = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \text{etc.} \tag{193}$$

Multipliant la seconde de ces équations, par x et sommant toutes les deux, membre à membre, on aura

$$F(x) = [A_0 + B_0 x] + [A_1 + B_1 x]\,x + [A_2 + B_2 x]\,x^2 + \text{etc.} \tag{194}$$

Comparant cette équation avec l'équation (191), on obtient la série d'équations

$$A_0 = f_2(0)\,\varphi(0), \quad A_1 = f_2(1)\,\varphi'(0), \quad A_2 = f_2(2)\,\varphi''(0), \quad \text{etc.}, \tag{195}$$

$$B_0 = f_3(0)\,\varphi(0), \quad B_1 = f_3(1)\,\varphi'(0), \quad B_2 = f_3(2)\,\varphi''(0), \quad \text{etc.} \tag{196}$$

Divisant membre à membre, chaque système de deux équations qui sont dans la même colonne, on trouve

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{f_2(0)}{f_3(0)}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{f_2(1)}{f_3(1)}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{f_2(2)}{f_3(2)}, \quad \text{etc.} \tag{197}$$

Des équations (192) et (193) on tire

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n}\left[\frac{d^n\cdot\psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{\psi^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n}, \tag{198}$$

$$B_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n(n+1)}\left[\frac{d^{n+1}\cdot[F(x)-\psi(x)]}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{F^{(n+1)}(0) - \psi^{(n+1)}(0)}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n(n+1)}, \tag{199}$$

désignant par $\psi^{(n)}(0)$ la dérivée de l'ordre n de la fonction $\psi(x)$ quand on y fait $x = 0$.

Cette quantité étant une simple fonction de n, faisons

$$\chi^{(n)}(0) = y_n; \text{ (200) et après, pour abréger, } \frac{f_3(n)}{f_2(n)} = f_4(n). \tag{200}$$

L'équation qui est le terme général des équations (197) deviendra

$$y_{n+1} + (n+1)\,f_4(n)\,y_n = F^{(n)}(0). \tag{201}$$

L'intégrale de cette équation à différences finies est

$$y_n = [n f_4(n-1)]^n \left(C + \Sigma \frac{F^{(n)}(0)}{[(n+1)f_4(n)]^{n+1}}\right) \tag{202}$$

désignant par Σ la caractéristique d'intégration en différences finies; C une constante arbitraire ou une fonction périodique dont la période est égale à l'unité; et supposant, d'après la notation de VENDERMONDE, que

$$[f(x-1)]^x = f(x-1)\,f(x-2)\cdot\cdot\cdot\cdot f(1)\,f(0). \tag{203}$$

Connaissant y_n ou $\chi^{(n)}(0)$, l'équation

$$A_n = f_2(n)\,\varphi^{(n)}(0), \tag{204}$$

donne $\varphi^{(n)}(0)$; et portant cette valeur dans l'égalité (189), on aura, en y faisant $\theta = 1$, l'expression en suite de la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation proposée.

La même méthode conduit à la solution de l'équation

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\alpha_1}^{\beta_1}[f_1(\theta)+x^1 f(\theta)]\,\varphi(\theta x)\,d\theta \;+\int_{\alpha_2}^{\beta_2}[f_2(\theta)+x^2 f(\theta)]\,\varphi(\theta x)\,d\theta \;+\;\text{etc.}\\
&+\int_{{}_1\alpha_1}^{{}_1\beta_1}[{}_1f_1(\theta)+x^1 f^1(\theta)]\,(\theta x)\,\varphi'(\theta x)\,d\theta \;+\int_{{}_1\alpha_2}^{{}_1\beta_2}[{}_1f_2(\theta)+x^2 f^1(\theta)]\,(\theta x)\,\varphi'(\theta x)\,d\theta \;+\;\text{etc.}\\
&+\int_{{}_2\alpha_1}^{{}_2\beta_1}[{}_2f_1(\theta)+x^2 f^1(\theta)]\,(\theta x)^2\varphi''(\theta x)\,d\theta \;+\int_{{}_2\alpha_2}^{{}_2\beta_2}[{}_2f_2(\theta)+x^2 f^2(\theta)]\,(\theta x)^2\varphi''(\theta x)\,d\theta \;+\;\text{etc.}\\
&+\;\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad+\;\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\qquad(205)$$

XXV.

Les problèmes du N° précédent sont plus compliqués que ceux que nous avons résolus premièrement, où la variable entrant dans la fonction $\varphi(x)$ ne multipliait pas x, mais se combinait avec elle par la voie de l'addition. En effet, tandis que pour ce dernier genre de questions nous avons résolu les équations (137), (168) et (181) sans faire aucun usage des séries, quand on veut traiter les autres par des intégrales définies, on n'arrive point, en suivant la même marche, qu'à résoudre l'équation

$$\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)+x f_1(\theta)]\,\varphi(\theta x)\,d\theta \;=\; F(x),\qquad(206)$$

et cela en faisant des calculs qui sont bien autrement compliqués que ceux qui ont été nécessaires pour la solution du problème correspondent (137).

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

Réduction d'une fonction quelconque $f(x)$ à la forme

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta x} f_1(\theta)\, d\theta.$$

Transformation analytique remarquable.

(Deuxième Extrait.)

I.

Après avoir donné plusieurs méthodes pour la solution des différents problèmes qui forment l'objet principal de ce Mémoire, nous sommes entrés dans la solution de plusieurs questions incidentes nécessaires pour la solution de nos problèmes et dont quelques unes sont par elles mêmes dignes de quelque attention. Une de ces questions, dont nous allons nous occuper dans cet article, est la réduction d'une fonction quelconque $f(x)$ à la forme

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta x} f_1(\theta)\, d\theta; \qquad (1)$$

où α, β et h sont des constantes et $f_1(\theta)$ une fonction de θ dépendant de la nature de la fonction $f(x)$.

Nous avons montré ailleurs que cette réduction est toujours possible, car en posant

$$a = -\infty, \quad b = +\infty, \quad h = \sqrt{-1}, \quad f_1(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta\omega\sqrt{-1}} f(\omega)\, d\omega, \qquad (2)$$

on tombe sur la formule de Fourier. Mais comme cette transformation est de la plus grande importance pour faciliter la solution de presque tous les problèmes généraux d'Analyse, il est convenable de montrer comment, dans des cas assez étendues, elle peut être exécutée sans faire usage de la for-

mule de l'illustre auteur de la *Théorie de la chaleur*. Souvent, en effet, la fonction $f(\theta)$ pourra être exprimée à l'aide d'une seule intégrale définie, et dans les cas où il en faudra deux, leurs limites auront des grandeurs finies.

II.

Parmi les fonctions qui peuvent être réduites à la forme (1), à l'aide d'une seule intégrale définie nous remarquons surtout

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0} \quad \text{où} \quad n < m \tag{3}$$

et les fonctions qui, mises à la place de y, satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned} (a+bx)\,y + (a'+b'x)\frac{dy}{dx} + (a''+b''x)\frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.} &= 0, \\ (a+bx)\,y + (a'+b'x)\,\Delta y + (a''+b''x)\,\Delta^2 y + \text{etc.} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

La fonction (3) pouvant être en effet décomposée en une suite de fonctions partielles de la forme

$$\frac{R_r}{x + b_r}, \tag{5}$$

et chacune de ces fonctions pouvant être remplacée par

$$R_r \int_0^\infty e^{-(x+b_r)\theta}\, d\theta, \tag{6}$$

il en résulte la réduction de la fonction à la forme désirée.

Quant aux fonctions satisfaisant aux équations (4), cela résulte des transformations élégantes données par Laplace dans sa *Théorie analytique des Probabilités*.

Les fonctions qui se trouvent comprises dans la série

$$f(h) + f'(h)\frac{x}{(1)^2} + f''(h)\frac{x^2}{(1\cdot 2)^2} + \text{etc.} \tag{7}$$

où la fonction $f(h)$ satisfait aux conditions auquelles la fonction $\varphi(x)$ est assujettie dans la formule

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi\sqrt{-1})}{[x-\chi\sqrt{-1}]^{n+1}}\, d\chi \tag{8}$$

et que nous déterminerons plus bas, sont encore réductibles à la forme (1).

En effet, au moyen de cette formule, la fonction (7) pouvant être mise sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\chi\sqrt{-1})}{h-\chi\sqrt{-1}} \left[1 - \frac{1}{h-\chi\sqrt{-1}}\frac{x}{1} + \frac{1}{(h-\chi\sqrt{-1})^2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \text{etc.}\right] d\chi, \tag{8}$$

on aura de suite

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{h-\chi\sqrt{-1}}} f(\chi\sqrt{-1})}{h-\chi\sqrt{-1}}\, d\chi. \tag{9}$$

Il y a encore beaucoup d'autres fonctions réductibles à la forme proposée au moyen d'une seule integrale définie, pourtant moins générales que les précédentes. Mais quand on veut faire cette transformation à l'aide d'une intégrale double, on a alors des fonctions bien plus générales, car toutes les fonctions qui sont données par l'intégration des équations différentielles linéaires, d'un ordre quelconque linéaire et à deux variables, dont les coefficients sont des fonctions algébriques et rationnelles de la variable indépendante, se prêtent immédiatement à cette transformation.

Cela résulte des calculs et des considérations suivants.

Prenons l'équation

$$(a+bx+cx^2+\text{etc.})y+(a'+b'x+c'x^2+\text{etc.})\frac{dy}{dx}+(a''+b''x+c''x^2+\text{etc.})\frac{d^2y}{dx^2}+\text{etc.}=0, \quad (10)$$

d'un ordre quelconque indéfini et dont les coefficients sont aussi des polynomes d'un degré quelconque. Faisons $y=\int e^{-ux}v\,du$: nous aurons, en procédant suivant les régles de la méthode de Laplace dernièrement citée,

$$v(a-a'u+a''u^2-\text{etc.})+\frac{d\cdot v(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})}{du}+\frac{d^2\cdot v(c-c'u+c''u^2-\text{etc.})}{du}+\text{etc.}=0, \quad (11)$$

pour déterminer v; et

$$\left.\begin{aligned}&-e^{-ux}\left[v(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})+\frac{d\cdot v(c-c'u+c''u^2-\text{etc.})}{du}+\text{etc.}\right]\\&+\frac{du}{d\cdot e^{-ux}}[v(c-c'u+c''u^2-\text{etc.})+\text{etc.}]\\&-\text{etc.}\end{aligned}\right\}=0, \quad (12)$$

pour déterminer les limites de l'intégrale.

L'équation (11), les différentiations indiquées étant exécutées, se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&v[a-b'+c''-\text{etc.}+(-a'+2b''-\text{etc.})u+(a''-\text{etc.})u^2+\text{etc.}]\\&+\frac{dv}{du}[b-2c'+\text{etc.}+(-b'+4c''-\text{etc.})u+(b''-\text{etc.})u^2+\text{etc.}]\\&+\frac{d^2v}{du^2}[c-\text{etc.}+(-c'+\text{etc.})u+(c''-\text{etc.})u^2+\text{etc.}]=0:\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

en faisant de nouveau $v=\int e^{-n\theta}\Omega\,d\theta$, pour transformer l'équation précédente, on voit qu'on obtient notre transformée, mettant dans cette équation au lieu de a, b, c, etc. respectivement

$$a-b'+2c''\ \text{etc.},\quad -a'+2b''-\text{etc.},\quad a''-\text{etc.},\quad \text{etc.},\quad \text{etc.}; \quad (14)$$

la transformée sera donc

$$\Omega(a-b\theta+c\theta^2-\text{etc.})-(a'-b'\theta+c'\theta^2-\text{etc.})\frac{d\Omega}{d\theta}+(a''-b''\theta+c''\theta^2-\text{etc.})\frac{d^2\Omega}{d^2\theta}-\text{etc.}=0. \quad (15)$$

L'équation relative aux limites sera, comme il est facile de voir,

$$\left.\begin{aligned}&-e^{-u\theta}[\Omega[-a'+2b''-\text{etc.}-(-b'+4c''-\text{etc.})a+(c''-\text{etc.})a^2+\text{etc.}]]\\&\qquad+\frac{d\cdot\Omega[a''-\text{etc.}-(b''-\text{etc.})a+(c''-\text{etc.})a^2+\text{etc.}]}{d\theta}\\&+\frac{d\cdot e^{-u\theta}}{d\theta}[\Omega[a''-\text{etc.}-(b''-\text{etc.})a+(c''-\text{etc.})\theta^2-\text{etc.}]]\\&-\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

En observant l'équation précédente, on voit qu'elle ne diffère de celle d'où nous sommes partis que parceque y y est changé en Ω et x en $-\theta$; d'où il résulte que si $f(x)$ est la valeur de y ou l'intégrale de l'équation proposée, la valeur de Ω doit être égale à $f(-\theta)$; et on aura entre y et Ω ce rapport

$$f(x) = C\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-u(x+\theta)} f(-\theta)\, du\, d\theta\,; \qquad (17)$$

α, β, α_1 et β_1 étant des constantes déterminées, les deux premières, par l'équation (12) et α_1, β_1, par l'égalité (16), suivant la marche prescripte par la méthode de LAPLACE.

Mettant dans cette équation $-\theta$ au lieu de θ et $u\sqrt{-1}$ à la place de u, on voit l'analogie qu'elle a avec la formule de FOURIER, et comme d'ailleurs l'équation d'où nous sommes partis est d'une très-grande généralité et que l'on peut même regarder, la fonction $f(x)$ comme étant une fonction quelconque, en admettant que des coefficients de l'équation (10) résultent du développement en suite de fonctions quelconques de x, on voit la possibilité d'arriver à la formule célèbre de l'illustre auteur de la Théorie de la Chaleur.

Mais cette formule étant très-solidement établie, je laisserai cela de côté, pour passer à d'autres remarques.

En faisant, pour abréger,

$$C\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-u\theta} f(-\theta)\, d\theta = f_1(u), \qquad (18)$$

l'équation précédente se réduit à

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ux} f_1(u)\, du. \qquad (19)$$

Nous avons ainsi une fonction très-générale, réduite à la forme (1), quoiqu'à l'aide de deux intégrales définies.

Après qu'on aura déterminé les limites des intégrales de cette formule, en exécutant l'intégration relativement à u, elle se réduit à

$$f(x) = C\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{e^{-\alpha(x+\theta)} - e^{-\beta(x+\theta)}}{x+\theta} f(-\theta)\, d\theta\,; \qquad (20)$$

et si α et β deviennent 0 et ∞, elle se réduit à

$$f(x) = C\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f(-\theta)}{x+\theta}\, d\theta. \qquad (21)$$

Ce dernier cas, entre autres, aura toujours lieu quand l'équation proposée sera telle que dans chaqu'un de ses termes l'indice de différentiation soit supérieur ou égal au degré du polynome coefficient. On voit cela en remarquant que l'équation (12), relative aux limites de u, prend alors la forme

$$e^{-ux} u\, F(u) + \frac{d \cdot e^{-ux}}{du} u^2 F_1(u) + \text{etc.}, \qquad (22)$$

$F(u)$, $F_1(u)$, etc. étant des fonctions rationnelles et entières de u. De là on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème. Si l'on désigne par $f(x)$ *une fonction satisfaisant à l'équation d'un ordre quelconque*

$$ay + (a' + b'x)\frac{dy}{dx} + (a'' + b''x + c''x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.} = 0, \qquad (23)$$

on peut toujours poser

$$f(x) = C\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f(-\theta)}{x+\theta}\, d\theta, \tag{24}$$

α_1 et β_1, étant des constantes déterminées en chaque cas particulier; et C *une constante indépendante de la forme de la fonction* f(x).

III.

La transformation de fonctions très-générales $f(x)$ aux formes (1), (21) est très-intéressante dans un grand nombre de questions analytiques, parce que la transendance de la fonction complexe $f(x)$ est rejetée sur les fonctions simples $e^{-\theta x}$, $\frac{1}{\theta+x}$; chose qui simplifie beaucoup ces problèmes. Ayant, par exemple, à trouver la dérivée de l'ordre n de la fonction $f(x)$, on aura qrdinairement un résultat dont on ne peut concevoir facilement la loi de composition en fonction de n; tandis que si cette fonction est réduite à la forme (21) la dérivée de l'ordre n est

$$C\,\Gamma^{(n+1)}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{f(-\theta)}{(x+\theta)^{n+1}}\, d\theta, \tag{25}$$

et par conséquent, on voit sous une forme simple la composition des dérivées successives en fonction de n. Un des principaux avantages de la formule de Fourier est de réduire la variabilité d'une fonction complexe $f(x)$ à e^x, c'est-à-dire, à une fonction qu'on peut considérer comme la plus simple de l'analyse; plus simple même que x^n, par la régularité avec laquelle on obtient les dérivées successives, ses différentielles et intégrales par $\int$ et Σ.

Je dis une des principales raisons; parce que ce qui semble donner à cette belle formule une aussi grande importance dans la géométrie, c'est la propriété qu'elle a de représenter entre des limites quelconques données une fonction quelconque et d'être entièrement nulle en dehors de ces limites: d'où il résulte qu'à son moyen nous pouvons trouver une fonction qui ne représente une série d'autres n'ayant pas le moindre rapport entre elles.

A la page 75 de ce Recueil nous avons donné une foule de formules jouissant de la même propriété.

IV.

Les équations (20) et (21) peuvent plusieurs fois servir à déterminer des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie. Supposons, par exemple, qu'on veut savoir quelle est la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\int_0^a \frac{\varphi(\theta)}{x+\theta}\, d\theta = F(x). \tag{26}$$

Si $F(x)$ satisfait à une équation de la forme (23) et si α_1, β_1 peuvent être déterminés de manière à coïncider avec les limites de l'intégrale proposée, la question est résolue sur-le-champ.

Si cela n'a pas lieu, faisons

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots\cdots\cdots + F_n(x), \tag{27}$$

et cherchons à déterminer les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc. en sorte qu'elles satisfassent aux conditions précédentes; les équations de la forme (23) à laquelle elles satisfont étant ou du même ordre ou d'ordres différents. Partageons de même la fonction $\varphi(x)$ comme suit

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots\cdots + \varphi_n(x). \tag{28}$$

Chacune des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc. étant déterminée par ce qui précède, la fonction $\varphi(x)$ le sera également.

Dans une autre occasion je développerai quelques unes des conséquences qui se déduisent de la méthode ou de la transformation que nous avons opérée, d'après LAPLACE, sur les équations différentielles à coefficients algébriques et rationnels.

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

(Troisième Extrait.)

Construction de quelques formules sommatoires.

I.

La seconde question dont nous avons à nous occuper c'est de la construction de quelques formules sommatoires. Pour cela nous nous sommes en grande partie appuyés sur les formules

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+\theta^2}\,\frac{f(-\theta\sqrt{-1})+f(\theta\sqrt{-1})}{2}\,d\theta &= \frac{\pi}{2}f(x), \\ \int_0^{\infty} \frac{\theta^2}{x^2+\theta^2}\,\frac{f(-\theta\sqrt{-1})+f(\theta\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,d\theta &= \frac{\pi}{2}f(x), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dans lesquelles $f(x)$ n'est pas une fonction quelconque; car la première suppose que la fonction $f(x-y\sqrt{-1})$: 1° soit monodrome et monogène; 2° qu'elle ne devienne pas infinie pour des valeurs positives de x; 3° qu'elle conserve une valeur finie pour $x=\pm\infty$, quelque soit x; 4° qu'elle conserve une valeur finie pour $x=\infty$, quelque soit y. La second suppose en outre que la fonction $f(x-y\sqrt{-1})$ s'évanouisse pour $x=\infty$.

Les formules précédentes ont été démontrées pour la première fois par M. Cauchy, qui a aussi indiqué les conditions sous lesquelles elles subsistent. A leur moyen, et ayant en vue les égalités (67), (68), (69), (70) et (71) de la page 13 de ce Recueil, on arrive de suite aux formules sommatoires qui se trouvent écrites dans la même page et dans la page suivante.

On peut encore construire une foule de formules du même genre ainsi qu'on le verra dans un autre Mémoire.

II.

Désignant par a_1 a_2, etc. les racines de l'équation

$$F(x) = 0, \tag{2}$$

et par $\psi(x, a_n)$ une fonction de x et d'une quelconque de ces racines, je suis aussi arrivé, dans le même Mémoire, à la construction de plusieurs formules sommatoires ayant pour but d'écrire sous forme finie la suite

$$\psi(x, a_1) + \psi(x, a_2) + \text{etc.} \tag{3}$$

Mais au lieu de les présenter ici, je crois plus convenable de renvoyer le lecteur, pour leur démonstration, à un autre mémoire qui fait partie de ce Recueil et dans lequel j'ai donné des méthodes assez générales pour sommer des suites de ce genre.

Réduction des différentes séries qui se trouvent dans le Mémoire à la forme finie.

III.

Ces différentes formules nous permettent de réduire à la forme finie les différentes suites que nous avons rencontrées dans notre Mémoire.

Ainsi, si la fonction $F(x)$ qui entre dans l'équation

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\varphi(x+\theta)\,d\theta = F(x), \tag{4}$$

se présente sous une quelconque des formes

$$F(x) = f_1(1)\,e^{mx} + f_1(2)\,e^{2mx} + f_1(3)\,e^{3mx} + \text{etc.}, \tag{5}$$

$$F(x) = f_1(1)\,e^{mx} - f_1(2)\,e^{2mx} + f_1(3)\,e^{3mx} - \text{etc.}, \tag{6}$$

$$F(x) = f_1(1)\,e^{mx} - f_1(3)\,e^{3mx} + f_2(5)\,e^{5mx} - \text{etc.}, \tag{7}$$

$$F(x) = f_1(2)\,e^{2mx} + f_1(4)\,e^{4mx} + f_1(6)\,e^{6mx} + \text{etc.}, \tag{8}$$

les valeurs correspondantes de $\varphi(x)$ se présentant, d'après la méthode du N° XV sous les formes

$$\varphi(x) = \frac{f_1(1)\,e^{mx}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \frac{f_1(2)\,e^{2mx}}{\int_\alpha^\beta e^{2m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \frac{f_1(3)\,e^{3mx}}{\int_\alpha^\beta e^{3m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \text{etc.}, \tag{9}$$

$$\varphi(x) = \frac{f_1(1)\,e^{mx}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta} f(\theta)\,d\theta} - \frac{f_1(2)\,e^{2mx}}{\int_\alpha^\beta e^{2m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \frac{f_1(3)\,e^{3mx}}{\int_\alpha^\beta e^{3m\theta} f(\theta)\,d\theta} - \text{etc.}, \tag{10}$$

$$\varphi(x) = \frac{f_1(1)\,e^{mx}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta} f(\theta)\,d\theta} - \frac{f_1(3)\,e^{3mx}}{\int_\alpha^\beta e^{3m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \frac{f_1(5)\,e^{5mx}}{\int_\alpha^\beta e^{5m\theta} f(\theta)\,d\theta} - \text{etc.}, \tag{11}$$

$$\varphi(x) = \frac{f_1(2)\,e^{2mx}}{\int_\alpha^\beta e^{2m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \frac{f_1(4)\,e^{4mx}}{\int_\alpha^\beta e^{4m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \frac{f_1(6)\,e^{4mx}}{\int_\alpha^\beta e^{6m\theta} f(\theta)\,d\theta} + \text{etc.}, \tag{12}$$

les formules (72), (73), (74), (75) et (76) des pages 13 et 14 les transformeront respectivement en

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \left[\frac{f_1(-\omega\sqrt{-1})\, e^{-m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{-m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} - \frac{f_1(\omega\sqrt{-1})\, e^{m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi\omega} + \frac{1}{e^{2\pi\omega} - 1} \right) d\omega, \quad (13)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \left[\frac{f_1(-\omega\sqrt{-1})\, e^{-m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{-m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} - \frac{f_1(\omega\sqrt{-1})\, e^{m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} \right] \left(\frac{1}{2\pi\omega} - \frac{2}{e^{\pi\omega} - e^{-\pi\omega}} \right) d\omega, \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} \int_0^\infty \left[\frac{f_1(-\omega\sqrt{-1})\, e^{-m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{-m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} - \frac{f_1(\omega\sqrt{-1})\, e^{m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} \right] \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\omega} - e^{-\frac{1}{2}\pi\omega}}{e^{\frac{1}{2}\pi\omega} - e^{-\frac{1}{2}\pi\omega}}\, d\omega, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{f_1(-\omega\sqrt{-1})\, e^{-m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{-m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} + \frac{f_1(\omega\sqrt{-1})\, e^{m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} \right] \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi\omega} + e^{-\frac{1}{2}\pi\omega}}\, d\omega, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_0^\infty \left[\frac{f_1(-\omega\sqrt{-1})\, e^{-m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{-m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} - \frac{f_1(\omega\sqrt{-1})\, e^{m\omega x\sqrt{-1}}}{\int_\alpha^\beta e^{m\theta\omega\sqrt{-1}} f(\theta)\, d\theta} \right] \left(\frac{\pi}{4} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\omega} - e^{-\frac{1}{2}\pi\omega}}{e^{\frac{1}{2}\pi\omega} + e^{-\frac{1}{2}\pi\omega}} - \frac{1}{2\omega} \right) d\omega. \quad (16)$$

On pourrait de même sommer les autres suites qui s'y trouvent lorsque la fonction $\varphi(x)$ est donnée par une série de la forme

$$f(1) + f(2) + f(3) + \text{etc.}, \quad (17)$$

$f(n)$ étant une fonction quelconque de n et de x.

Il est inutile d'observer que dans les formules précédentes $f(n)$, qui représente leur terme général, n'est pas une fonction quelconque, mais qu'elle doit satisfaire aux différentes conditions auxquelles satisfont les formules qui entrent dans leur construction: il faut encore que la même fonction rende convergente la série (17) que l'on veut sommer.

IV.

Quand l'expression de $\varphi(x)$ au lieu d'avoir la forme (17) est donnée par une série de la forme (3), nous l'avons mise encore sous forme finie à l'aide des plusieurs formules sommatoires de ce genre, que nous avons construites et qui, ainsi que nous l'avons dit, seront démontrées plus tard.

On peut se servir, pour le même objet, de plusieurs formules du même genre qui ont été données par M. Cauchy dans ses Exercices de Mathématiques. En combinant ces différentes formules avec le théorème de Leibniz sur le développement des fonctions et avec la formule

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\chi\sqrt{-1})}{[x - \chi\sqrt{-1}]^{n+1}}\, d\chi$$

on peut mettre l'expression précédente de $\varphi(x)$ sous des formes extrêmement variées.

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

Réduction des fonctions discontinues à la forme des fonctions continues. Théorème de M. TCHEBICHEF.

(Quatrième Extrait.)

I.

Pour que l'on puisse appliquer les méthodes précédentes à la sommation de la suite

$$f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n) + \cdots\cdots \tag{1}$$

il faut que son terme général $f(n)$ soit une fonction continue, ou bien une fonction ayant la forme d'une fonction continue. Or il arrive souvent que cela n'a pas lieu et que la fonction $f(n)$ renferme dans son expression des termes ou des facteurs de la forme

$$1 + 2 + 3 \cdots\cdots + n + \cdots\cdots \tag{2}$$

ou

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots\cdots n \cdots\cdots \tag{3}$$

On a déjà montré dans quelques cas particuliers comment on peut réduire à la forme continue une fonction discontinue; mais je ne crois pas qu'on l'ait fait pour une fonction quelconque. Voici en tout cas comment on pourrait s'y prendre.

Généralement ces fonctions sont de la forme

$$f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n), \tag{4}$$

$$f(1)\, f(2) \cdots\cdots f(n). \tag{5}$$

Occupons-nous de la première et pour la réduire à la forme de fonction continue, désignons la par y_n; on déduira facilement

$$y_{n+1} = y_n + f(n+1)$$

Regardant $f(n+1)$ comme une fonction continue de n mettons la sous la forme

$$f(n+1) = \int_a^b e^{hn\theta} f_1(\theta)\, d\theta : \tag{7}$$

il est évident que l'on doit prendre

$$y_n = \int_a^b \frac{e^{hn\theta}}{e^{h\theta}-1} f_1(\theta)\, d\theta. \tag{8}$$

Quand il s'agit de la fonction (5), en la désignant par z_n, on aura

$$z_{n+1} = f(n+1)\, z_n. \tag{9}$$

Prenant les logarithmes et faisant $l \cdot z_n = y_n$, on aura

$$y_{n+1} = y_n + l \cdot f(n+1); \tag{10}$$

cette équation ayant la forme de l'équation (6), on aura de suite la fonction y_n, et par conséquent z_n, sous forme continue.

II.

Le théorème de M. Tchebichef dont il a été question dans ce Mémoire se réduit à transformer une intégrale multiple de la forme

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\cdots f_1(\theta_1) f_2(\theta_2) f_3(\theta_3)\cdots \varphi(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots)\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3\cdots \tag{11}$$

en

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\beta\sqrt{-1}}\,\varphi(\beta)\left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{\gamma\theta_1} f_1(\theta_1)\, d\theta_1 \cdot \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{\gamma\theta_2} f_2(\theta_2)\, d\theta_2 \cdot \int_{\alpha_3}^{\beta_3} e^{\gamma\theta_3} f_3(\theta)\, d\theta_3 \cdots\right] d\gamma\, d\beta. \tag{12}$$

Pour cela il n'y a qu'à faire

$$\varphi(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots-\beta)\sqrt{-1}}\,\varphi(\beta)\, d\gamma\, d\beta; \tag{13}$$

ce qui est permis en vertu de la formule de Fourier.

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

Application à quelques questions de Physique.

(Cinquième Extrait.)

Détermination de la loi d'attraction suivant laquelle le pôle d'un aimant attire un élément de courant électrique.

I.

D'après une expérience de SAVART et de M. BIOT, l'action qu'un courant électrique indéfini exerce sur le pôle d'un aimant est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée de ce pôle sur le courant. En connaissant l'action totale du courant, il s'agit de savoir quelle doit être l'action de chaque élément

Le problème peut donc être formulé de la manière suivante.

Le courant électrique $M\,M'$, supposé indéfini des deux côtés, exerce sur le pôle P d'un aimant une action dont la direction est normale au plan $M\,M'\,P$: ces actions s'ajoutent pour former un résultat normal aussi à ce plan et dont l'intensité est représentée par la fonction $\frac{c}{y}$, c étant une constante et y la distance $P\,A$.

Représentant par $\psi(r)$ la fonction inconnue de la distance $P\,J = r$ qui donne la loi d'attraction d'un élément quelconque $m\,m'$ sur le pôle P de l'aimant; et faisant $A\,J = s$, $P\,J\,M' = \xi$, l'action de $m\,m' = d\,s$ sur le pôle P doit être égale à

$$\psi(r)\,\sin\,\xi\,d\,s:$$

et l'action de cet élément ainsi que de tous les autres étant normale au plan $M\,M'\,P$, d'après les conditions du problème et les principes de Mécanique, il est clair que l'on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r)\,\sin\,\xi\,d\,s \;=\; \frac{c}{y} \qquad (1)$$

pour l'équation qui renferme la solution du problème proposé.

Pour réduire maintenant les différentes variables qui entrent dans cette équation à deux seulement, on n'a qu'à composer les différentes parties du triangle AJP qui fournit de suite les rapports

$$\left.\begin{aligned} AJ = r &= \sqrt{s^2+y^2}, \\ \sin AJP = \sin\xi &= \frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

qui transforment l'équation précédente en

$$\int_0^\infty \frac{\psi(\sqrt{y^2+s^2})}{\sqrt{y^2+s^2}}\,ds = \frac{c}{2y} \tag{3}$$

faisant aussi attention à ce que l'intégrale étant composée d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires, il revient au même si on la prend seulement depuis $s=0$ jusqu'à $s=\infty$, en doublant les résultats. La question se réduit maintenant à résoudre l'équation (3).

Pour résoudre cette équation d'où dépend maintenant la solution du problème, posons

$$s^2 = \theta, \qquad y^2 = x, \qquad \frac{\psi(x)}{x} = \varphi(x^2): \tag{4}$$

elle se transforme en

$$\int_0^\infty \varphi(\theta+x)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \frac{a}{x}, \tag{5}$$

ou

$$\int_0^\infty \varphi(\theta+x)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = a\int_0^\infty e^{-\omega x}\,d\omega \tag{6}$$

faisant attention à ce que l'on peut remplacer $\frac{1}{x}$ par

$$\int_0^\infty e^{-\omega x}\,dx. \tag{7}$$

Pour résoudre cette équation on peut avoir recours au théorème VI de la page 224.

Si l'on y fait

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \infty, \qquad F_1(\omega) = a, \qquad a = 0, \qquad l = \infty, \tag{8}$$

on en déduira

$$\varphi(x) = a\int_0^\infty \frac{e^{-x\omega}\,d\omega}{\int_0^\infty e^{-\theta\omega}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}}, \tag{9}$$

ou bien

$$\varphi(x) = \frac{a}{2x^{\frac{1}{2}}} \tag{10}$$

en tenant compte des formules connues

$$\int_0^\infty e^{-\theta\omega}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega^{\frac{1}{2}}}, \qquad \int_0^\infty e^{-x\omega}\sqrt{\omega}\,d\omega = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Si l'on remplace dans la formule (10) x par x^2, et si l'on tient compte de la dernière des égalités (4), on trouve l'équation

$$\psi(x) = \frac{a}{2x^2} \tag{12}$$

qui résout définitivement le problème, et fait voir que l'action que l'élément du courant électrique exerce sur le pôle d'un aimant est en raison inverse de la distance, comme LAPLACE et M. LIOUVILLE l'ont trouvé par d'autres moyens.

Détermination de la loi d'attraction suivant laquelle deux éléments de courants électriques s'attirent mutuellement.

II.

AMPÈRE a démontré que les divers éléments $m\,m'$ d'un courant électrique indéfini $A\,B$ (fig. 4) exercent sur les éléments $m\,m'$ d'un autre courant $A'\,B'$ qui lui est parallèle une action dirigée selon $J\,J'$ et représentée par

$$\psi(r)\,[1 + (k-1)\cos^2\xi]\,ds\,ds'; \tag{13}$$

ξ étant l'angle que fait $J\,J'$ avec les directions des deux courants; ds, ds' les deux éléments infiniment petits $m\,m'$, $m\,m'$ pris sur ces deux courants; k une constante numérique et $\psi(r)$ la fonction inconnue de la distance $J\,J' = r$, suivant laquelle les deux éléments des courants électriques s'attirent mutuellement. On connaît le résultat de l'action totale, laquelle est proportionnelle à $\frac{a\,l}{y}$, a et l étant des constantes et y la grandeur de la perpendiculaire a baissée d'un courant électrique sur l'autre.

Il s'agit de déterminer la forme de la fonction $\psi(r)$.

Il est facile de voir que l'équation du problème est

$$\int_0^l ds' \int_{-\infty}^{\infty} [1 + (k-1)\cos^2\xi]\sin\xi\,ds = \frac{a\,l}{y}; \tag{14}$$

si l'on désigne par l la longueur du courant fini $A'\,B'$.

L'équation précédente, en exécutant l'intégration relativement à s', en faisant $J\,L = s$ et en ayant égard aux rapports connus entre les différentes parties d'un triangle, et, par suite, dans le cas actuel entre r, s et ξ, en vertu du triangle $J\,L\,J'$; en observant d'ailleurs que relativement à s l'intégrale est composée d'éléments égaux deux à deux et du même signe, se transforme en

$$\int_0^{\infty} \left[1 + (k-1)\frac{s^2}{s^2+y^2}\right] \frac{\psi(\sqrt{s^2+y^2})}{\sqrt{s^2+y^2}}\,ds + \frac{a}{2y^2}. \tag{15}$$

Faisons

$$\frac{\psi(x)}{x^3} = \varphi(x^2), \qquad y^2 = x, \qquad s^2 = \theta: \tag{16}$$

l'équation précédente se transforme en

$$\int_0^{\infty} (k\theta + x)\,\varphi(x+\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = a\int_0^{\infty} e^{-\omega x}\,d\omega, \tag{17}$$

mettant dans le second membre au lieu de $\frac{1}{x}$ la valeur équivalente

$$\int_0^\infty e^{-x\omega}\, d\omega. \tag{18}$$

C'est de cette équation que dépend maintenant la détermination de $\psi(r)$. Pour cela, nous nous servirons du théorème IV. Dans le cas actuel, ayant

$$f(\theta) = k\sqrt{\theta}, \quad f_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \infty, \quad F_1(\omega) = a, \quad a = 0, \quad b = \infty; \tag{19}$$

la partie de $\varphi(x)$ indépendante de constantes arbitraires se réduit à

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \omega^{\frac{1}{2}k}\, d\omega \int_\omega^\infty e^{-x\xi}\, \xi^{\frac{1}{2}(1-k)}\, d\xi, \tag{20}$$

faisant attention à ce que

$$\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{-\theta\omega}\, d\theta = k\int_0^\infty e^{-\theta\omega}\sqrt{\theta}\, d\theta = \frac{\frac{1}{2}k\sqrt{\pi}}{\omega^{\frac{3}{2}}}, \quad \int_0^\infty f_1(\theta)\, e^{-\theta\omega}\, d\theta = \int_0^\infty e^{-\theta\omega}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega^{\frac{1}{2}}}, \tag{21}$$

$$r = \frac{\int_\alpha^\beta f(\theta)\, e^{-\theta\omega}\, d\theta}{\int_\alpha^\beta f_1(\theta)\, e^{-\theta\omega}\, d\theta}, \qquad \psi(\omega) = \frac{1}{\int_\alpha^\beta f_1(\theta)\, e^{-\theta\omega}\, d\theta}\, e^{-\int r\, d\omega} = \frac{\omega^{\frac{1}{2}(1-k)}}{\sqrt{\pi}}. \tag{22}$$

Posant maintenant $x\xi = \chi$ et ensuite $x\omega = z$ la fonction (20) se transformera en

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}k}\, dz \int_z^\infty e^{-\chi}\, \chi^{\frac{1}{2}(1-k)}\, d\chi. \tag{23}$$

Faisons encore $\chi = z(1+t)$; on aura

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty z^{\frac{3}{2}} e^{-z}\, dz \int_0^\infty e^{-tz}\, (1+t)^{\frac{1}{2}(1-k)}\, dt. \tag{24}$$

ou

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty (1+t)^{\frac{1}{2}(1-k)}\, dt \int_0^\infty z^{\frac{3}{2}} e^{-(t+1)z}\, dz; \tag{25}$$

que la supposition $z(1+t) = \rho$ réduit à

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{2+\frac{1}{2}k}} \int_0^\infty e^{-\rho}\, \rho^{\frac{3}{2}}\, d\rho: \tag{26}$$

mais comme

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{2+\frac{1}{2}k}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}k}, \qquad \int_0^\infty e^{-\rho}\, \rho^{\frac{3}{2}}\, d\rho = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \tag{27}$$

on aura définitivement

$$\frac{3a}{2(2+k)\, x^{\frac{5}{2}}}; \tag{28}$$

pour la partie de la valeur de $\varphi(x)$ indépendante de constantes arbitraires. Pour trouver l'autre partie, observons que l'équation (225) qui se réduit, dans le cas actuel, à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x\xi} \xi^{\frac{1}{2}(1-k)} \frac{1}{\sqrt{\xi}} = 0 \tag{29}$$

reste satisfaite, k étant égal à $-\frac{1}{2}$ (V. Ampère, Mémoire de l'Acad. des Sciences, A. VI, p. 272), seulement avec les valeurs $\xi = 0$ et $\xi = \infty$. Par conséquent, en vertu des équations (223) et (264), la partie de $\varphi(x)$ contenant des constantes arbitraires se réduit à

$$C \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}}. \tag{30}$$

Par conséquent la valeur la plus générale de $\varphi(x)$ est

$$\varphi(x) = \frac{C}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}} + \frac{3a}{2(2+k)x}. \tag{31}$$

Remplaçant dans cette équation x par x^2 et ayant égard à l'équation qui lie $\psi(x)$ à $\varphi(x^2)$, on aura

$$\psi(x) = \frac{C}{x^{-k}} + \frac{3a}{2(2+k)x^2} \tag{32}$$

pour l'expression de l'attraction élémentaire selon laquelle un élément de courant électrique attire un autre élément.

III.

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante C.

Pour cela observons que quand on fait agir des courants électriques les uns sur les autres plus, ou sur les pôles d'un aimant, on remarque qu'en prenant un des courants assez grand soit relativement aux dimensions de l'autre ou relativement aux dimensions de l'aimant et de la distance que les sépare, la grandeur du courant n'altère pas sensiblement les phénomènes observés; d'où l'on est porté à conclure qu'ils ne changeraient rien encore, si le courant était infiniment grand, supposition qui implique celle d'une force attractive nulle à une distance un peu grande. Ainsi dans les expériences d'Ampère, de Savart et de M. Biot, on ne peut établir les équations (3), (13), ou si on les admet, il faut nécessairement supposer que la fonction $\psi(r)$ se réduit à zéro quand la variable r devient infinie. Dans le problème proposé, on aura donc

$$\psi(\infty) = 0. \tag{33}$$

On doit même remarquer que non seulement la fonction $\psi(r)$ est nulle lorsque r prend une valeur infinie, mais que l'équation précédente subsiste encore quand cette variable prend seulement des valeurs plus grandes qu'un petit nombre de multiples de l ou de la grandeur du petit courant. En effet, les expériences qui ont servi pour établir l'équation (13) étant faites dans une salle de dimensions ordinaires, on ne peut pas supposer que la distance $J'A$ qui va du milieu du petit courant jusqu'à l'une des extrémités du grand, soit huit ou dix fois plus grande que la distance $J'L$ qui sépare le milieu de l'une du milieu de l'autre, et cependant dans les limites de ces expériences on trouve déjà qu'on n'altère pas les phénomènes observés en diminuant les dimensions du courant $A'B'$.

Cela posé, faisant $J' L = 1$ et mettant successivement dans l'expression de $\psi(x)$ donnée par l'équation (32) 1 et 10 à la place de x, on trouvera

$$\psi(1) = C + \frac{3a}{4+1}, \tag{34}$$

$$\psi(10) = \frac{C}{\sqrt{10}} + \frac{3a}{(4+1)\cdot 100}, \tag{35}$$

faisant attention à ce que k est égal à $-\frac{1}{2}$.

Maintenant, d'après les considérations que nous venons de faire, $\psi(10)$ devant être sensiblement nul, il faut que le second nembre de l'équation (35) soit nul; or la fraction

$$\frac{3a}{(4+1)\cdot 100} \tag{36}$$

est une quantité assez petite, mais on ne peut pas en dire autant de

$$\frac{C}{\sqrt{10}} \tag{37}$$

qui est un peu plus petit que le tiers de C.

Pour concilier ces résultats contradictoires il faut nécessairement que le terme

$$\frac{C}{x^{-k}} \tag{38}$$

disparaisse de l'expression de $\psi(x)$, qui se réduisant alors à

$$\psi(x) = \frac{3a}{2(2+k)x^2}, \tag{39}$$

fait voir que la loi d'attraction réciproque des éléments de deux courants électriques marchant dans le même sens est, comme la gravitation universelle, celle de la raison inverse des carrés des distances.

L'équation (39) a été pour la première fois trouvée par AMPÈRE. M. LIOUVILLE traitant aux ensuite le même problème, et ne supposant pas à priori que la fonction cherchée dût être de la forme $C_1 r^n$, ait est arrivé à l'équation (32). Il suppose que pour déterminer la constante C qui figure dans cette équation, il faut une nouvelle expérience. Cela est vrai, si l'on se reporte au problème analytique défini par l'équation (74); mais il n'en est pas ainsi, si l'on remonte aux expériences qui ont servi à l'établir.

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

Application à la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles.

(Sixième Extrait.)

I.

Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{b}{x^2}z\right), \tag{1}$$

qui a été le sujet des travaux de LAGRANGE, d'EULER et de POISSON (V. POISSON, Journal de l'Ecole Polyt., XIX^e^ cahier), et qui cependant n'a pas encore été intégrée dans toutes les suppositions que l'on peut faire sur les valeurs des constantes a, b et c qui y entrent.

Nous allons non seulement l'intégrer, mais encore déterminer les fonctions arbitraires que son intégrale doit renfermer par la condition que l'on ait

$$z = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = F(x), \quad \text{quand} \quad t = 0. \tag{2}$$

Pour cela, faisant

$$z = A e^{-cpt} u, \tag{3}$$

u ne renfermant pas t, on aura, pour déterminer cette quantité u,

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + ax\frac{du}{dx} + (b - p^2x^2)u = 0. \tag{4}$$

L'intégrale de cette équation est comprise comme cas particulier dans celle de l'équation plus générale

$$ax^2\frac{d^2u}{dx^2} + (bx^2 + cx)\frac{du}{dx} + (dx^2 + ex + f)u = 0, \tag{5}$$

que l'on intégre en posant $u = yx^{\delta}$: car elle se transforme en

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + [bx^2 + (2a\delta + c)x]\frac{dy}{dx} + [dx^2 + (b\delta + e)x + a\delta(\delta - 1) + c\delta + f]y = 0, \quad (6)$$

ou en

$$ax\frac{d^2y}{dx^2} + (bx + 2a\delta + c)\frac{dy}{dx} + (dx + b\delta + e)y = 0, \quad (7)$$

déterminant δ par l'équation

$$a\delta(\delta - 1) + c\delta + f = 0; \quad (8)$$

Lorsque les coefficients sont des polynomes du premier degré, on peut l'intégrer par la méthode très-élégante donnée par LAPLACE, dont nous nous sommes déjà servie plusieurs fois dans ce Mémoire. L'intégrale de l'équation proposée dépend alors d'une seule intégration définie.

Appliquant cela à l'équation (5), on aura

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2k\frac{dy}{dx} - \rho^2 xy = 0, \quad (9)$$

pour déterminer y, en faisant, pour abréger $2k = 2\delta + a$, et déterminant δ par l'égalité

$$\delta(\delta - 1) + a\delta + b = 0. \quad (10)$$

connaissant δ et y, on a u par l'équation $u = x^{\delta}y$.

Pour intégrer l'équation (9) faisons comme à l'ordinaire

$$y = \int e^{-x\theta}\,d\theta: \quad (11)$$

nous aurons

$$(\theta^2 - \rho^2)\frac{d\Omega}{d\theta} + (1 - k)\theta\Omega = 0: \quad (12)$$

d'où l'on tire

$$\Omega = C(\theta^2 - \rho^2)^{k-1}, \quad (13)$$

pour déterminer Ω, et

$$e^{-\theta x}\Omega(\theta^2 - \rho^2) = Ce^{-\theta x}(\theta^2 - \rho^2)^k = 0 \quad (14)$$

pour les limites de l'intégrale (11). Pour déterminer celles-ci, il est nécessaire de considérer les différentes valeurs que peuvent avoir les quantités δ et k. Ayand égard aux équations qui les définissent, on aura

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - b}, \\ k_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - b}, \qquad k_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - b}; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

et comme $k_1 + k_2 = 1$, il s'ensuit qu'en désignant par a_1, a_2 deux quantités réelles et positives, et par b_1 une quantité réelle, mais positive ou négative, les uniques combinaisons distinctes que peuvent présenter les valeurs de k sont

$$\begin{cases} k_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1} \\ k_2 = a_2 - b_2\sqrt{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1} \\ k_2 = -a_2 - b_1\sqrt{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1} \\ k_2 = -\ \ -b_1\sqrt{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = a_1 \\ k_2 = a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = a_1 \\ k_2 = -a_2. \end{cases} \quad (16)$$

Si le premier cas a lieu, pour satisfaire à l'équation (14) il suffit de faire $\theta = -\rho$ et $\theta = \rho$. La valeur de y sera alors

$$y = C\int_{-\rho}^{+\rho} e^{-x\theta}(\theta^2 - \rho^2)^{k-1}\,d\theta; \quad (17)$$

et se transforme en

$$y = C\int_0^{\pi} e^{-x\rho\cos\omega}\sin^{2k-1}\omega\, d\omega. \tag{18}$$

Représentant par δ_1, δ_2 les valeurs de δ correspondantes aux deux valeurs de k, on aura pour déterminer z, en tenant compte de l'équation $u = x^{\delta} y$,

$$\left.\begin{aligned} z &= A\, e^{-c\rho t}\, x^{\delta_1}\int_0^{\pi} e^{-x\rho\cos\omega}\sin^{2k_1-1}\omega\, d\omega \\ &+ B\, e^{-crt}\, x^{\delta_2}\int_0^{\pi} e^{-x\rho\cos\omega}\sin^{2k_2-1}\omega\, d\omega; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

A étant une fonction quelconque de ρ et B une fonction de r. Prenant un nombre quelconque de termes comme celui-ci et remarquant que l'équation proposée (1) est linéaire, on aura pour son intégrale

$$\left.\begin{aligned} z &= x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\psi(ct + x\cos\omega)\sin^{2k_1-1}\omega\, d\omega \\ &+ x^{\delta_2}\int_0^{\pi}\chi(ct + x\cos\omega)\sin^{2k_2-1}\omega\, d\omega \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

en observant que la quantité,

$$A_1\, e^{-\rho_1(ct + x\cos\omega)} + A_2\, e^{-\rho_2(ct + x\cos\omega)} + \text{etc.} \tag{21}$$

peut être remplacée par une fonction arbitraire de $(ct + x\cos\omega)$. L'intégrale précédente s'accorde exactement avec celle qui a été donnée par Poisson.

Quand k aura le 2e système de valeurs, on aura encore pour déterminer y l'intégrale particulière (16), applicable seulement au cas où $k = a_1 + b\sqrt{-1}$. Pour obtenir une seconde intégrale, il faudra ayant en vue l'équation aux limites (14), faire $\theta = \omega\sqrt{-1}$ et prendre l'intégrale entre les limites $-\infty$ et $+\infty$. La valeur de y se réduit alors à

$$y = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x\sqrt{-1}}(\omega^2 + \rho^2)^{k-1}\, d\omega; \tag{22}$$

ou à

$$y = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\rho x\sqrt{-1}}(\omega^2 - 1)^{k-1}\, d\omega, \tag{23}$$

remplaçant ρ par $\rho\sqrt{-1}$, puis ω par $\rho\omega$, la valeur de z prend alors la forme

$$\left.\begin{aligned} z &= A\, e^{-c\rho t}\, x^{\delta_1}\int_0^{\pi} e^{-x\rho\cos\omega}\sin^{2k_1-1}\omega\, d\omega \\ &+ B\, e^{-c\rho t}\, x^{\delta_2}\int_0^{\pi} e^{-x\rho\cos\omega}(\omega^2 - 1)^{k_2-1}\, d\omega; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

d'où l'on conclut,

$$\left.\begin{aligned} z &= x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\psi(ct + x\cos\omega)\sin^{2k_1-1}\omega\, d\omega \\ &+ x^{\delta_2}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(ct + x\omega)(\omega^2 - 1)^{k_2-1}\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Je mets de côté le troisième système parce qu'il ne peut avoir lieu tant que a et b seront réels, ce qui a toujours lieu quand l'équation (1) est l'expression des phénomènes physiques. Quand le quatrième système aura lieu, il est évident que l'intégrale prendra la forme (20), et la forme (25), quand ce sera le cinquième. Enfin quand les deux valeurs de k seront égales, ce qui exige nécessairement qu'elles soient réelles et égales à $\frac{1}{2}$, l'intégrale de la proposée est

$$\left.\begin{aligned} z \;=\; & x^{\frac{1}{2}(1-a)}\int_0^{\pi} \psi\,(ct + x\cos\omega)\,d\omega \\ & + x^{\frac{1}{2}(1-a)}\int_0^{\pi} \chi\,(ct + x\cos\omega)\log(x\sin^2\omega)\,d\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Ainsi l'intégrale de l'équation (1), quand ses coefficients sont réels, est donnée dans tous les cas par une des trois formules précédentes. Il est assez remarquable que cette équation ayant été l'objet des travaux de plusieurs géomètres, n'ait pas encore été intégrée dans tous les cas sous forme finie. M. Lobatto, qui s'en est occupé dans son Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles à trois variables, ne donne pas son intégrale complète, quoique son analyse eût pu l'y conduire facilement, puisqu'elle est au fond semblable à la nôtre.

II.

Si pour déterminer les fonctions arbitraires ψ, χ, par les conditions qui naturellement se présentent dans les problèmes physiques, c'est-à-dire, par les conditions $z = f(x)$, $\frac{dz}{dt} = F(x)$, quand $t = 0$, nous voulions employer les formules précédentes, on arriverait à des équations, renfermant les deux inconnues, qui ne sont pas faciles à traiter; il vaut donc mieux procéder de la manière suivante.

Prenons l'intégrale

$$z \;=\; A\,x^{\delta_1}\int_0^{\pi} e^{-\rho(ct + x\cos\omega)}\sin^{2k_1-1}\omega\,d\omega \qquad (27)$$

qui, d'après ce que nous avons vu précédemment, subsiste dans tous les cas ou suppositions faites sur les coefficients de l'équation proposée. Il est évident que l'intégrale

$$A\,x^{\delta_1}\int_0^{\pi} e^{\rho ct}\,e^{-\rho x\cos\omega}\sin^{2k_1-1}\omega\,d\omega, \qquad (28)$$

ainsi que la somme des deux

$$z \;=\; A\,x^{\delta_1}\int_0^{\pi} (e^{\rho ct} - e^{-\rho ct})\,e^{-\rho x\cos\omega}\sin^{2k_1-1}\omega\,d\omega \qquad (29)$$

y satisfera encore. Celle-ci, en changeant la constante A peut s'écrire ainsi qu'il suit:

$$z \;=\; A\,x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\rho(at\cos\chi + x\cos\omega)}\,t\sin^{2k_1-1}\omega\sin\chi\,d\omega\,d\chi \qquad (30)$$

d'où l'on conclut, comme précédemment

$$z = x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\psi(ct\cos\chi + x\cos\omega)\, t\sin^{2k_1-1}\omega\sin\chi\, d\omega\, d\chi. \tag{31}$$

Cependant, en considérant la forme de la proposée, en voit que si une fonction quelconque $\Phi(x, t)$ y satisfait, la dérivée de la même fonction relativement à t y satisfera également: il en résulte que la valeur la plus générale qui satisfait à l'équation (1) est

$$\left.\begin{aligned} z &= x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\psi(ct\cos\chi + x\cos\omega)\, t\sin^{2k_1-1}\sin\chi\, d\omega\, d\chi \\ &+ x^{\delta_1}\frac{d\cdot}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(ct\cos\chi + x\cos\omega)\, t\sin^{2k_1-1}\sin\chi\, d\omega\, d\chi. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Ce qui est remarquable dans cette intégrale c'est qu'elle embrasse toutes les hypothèses relativement aux coefficients de l'équation proposée, même ceux dans lesquels les coefficients sont imaginaires; car en vertu de l'égalité $k_1 + k_2 = 1$, l'intégrale sur laquelle nous nous sommes appuyé subsistera toujours.

Au moyen de cette forme d'intégrale les fonctions arbitraires se déterminent beaucoup plus facilement: ainsi l'on a, $f(x)$ étant la valeur de z correspondante à $t = 0$, et $F(x)$ celle de $\frac{dz}{dt}$,

$$f(x) = 2\, x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\Phi(x\cos\omega)\sin^{2k_1-1}\omega\, d\omega, \tag{33}$$

$$F(x) = 2\, x^{\delta_1}\int_0^{\pi}\psi(x\cos\omega)\sin^{2k_1-1}\omega\, d\omega. \tag{34}$$

Les variables Φ, ψ sont séparées et leurs valeurs peuvent facilement être trouvées par les méthodes que nous avons données dans les pages antérieures. Je trouve inutile de poursuivre le calcul. Une chose qu'on doit observer c'est que l'intégrale (32), en apparence plus compliquée que les intégrales (20), (25), (26), puisque ces dernières ne contiennent qu'une intégrale définie, tandis qu'elle en contient deux, ne l'est pas en réalité, parce que ses fonctions arbitraires se déterminent d'une manière beaucoup plus simple. Cela fait voir aussi, quand il s'agit d'intégrer une équation différentielle partielle, la nécessité d'indiquer le moyen de déterminer ses fonctions arbitraires (problème en général plus difficile que celui de l'intégration elle-même), pour qu'on puisse juger de sa plus ou moins grande simplicité. Sous ce rapport, les intégrales données par Poisson dans le t. III des Mémoires de l'Acad. des Sc. sont très-remarquables.

Les formules et les théorèmes que nous avons donnés dans ce Mémoire permettent de résoudre avec assez d'étendue le problème dont nous avons parlé.

Mémoire

sur la

Détermination des fonctions inconnues qui entrent sous le signe d'intégration définie.

(Septième Extrait.)

Intégration d'une équation différentielle.

I.

On a vu plus haut (deuxième extrait) comme on est tout naturellement porté par la nature même des choses à mettre les fonctions

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\theta)}{x+\theta}\, d\theta; \tag{1}$$

et si cela n'a pas lieu pour toutes les fonctions, on a pu du moins se convaincre que cette transformation pourra s'exécuter dans des cas qui sont assez généraux. Lorsqu'on veut donc déterminer une fonction inconnue y, définie par une équation différentielle ou tout autrement, on pourra souvent supposer que cette fonction soit de la forme (1), ou, pour donner plus d'étendue à cette recherche, poser

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\theta)}{(x+\theta)^m}\, d\theta, \tag{2}$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction de θ à déterminer ainsi que les limites α, β de l'intégrale: m une constante dont on pourra ordinairement disposer pour faciliter les opérations.

Appliquons cela à l'équation

$$(ax^2+bx+c)\frac{dy^2}{dx^2} + (gx+h)\frac{dy}{dx} + fy = 0. \tag{3}$$

Posons

$$y = \int \frac{\varphi(\theta)}{(x+\theta)^m}\, d\theta, \tag{4}$$

et déterminons la fonction $\varphi(\theta)$ ainsi que les limites de l'intégrale pour que cette fonction satisfasse à l'équation précédente.

Faisant pour abreger

$$\frac{1}{(x+\theta)^m} = \Theta, \tag{5}$$

il est facile de voir qu'on aura

$$\left.\begin{aligned} y &= \int \Theta\varphi(\theta)\,d\theta, \qquad \frac{dy}{dx} = \int \frac{d\Theta}{d\theta}\varphi(\theta)\,d\theta, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \int \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\varphi(\theta)\,d\theta, \\ x\frac{dy}{dx} &= -m\int \Theta\varphi(\theta)\,d\theta - \int \frac{d\Theta}{d\theta}\theta\varphi(\theta)\,d\theta, \quad x\frac{d^2y}{dx^2} = -(m+1)\int \frac{d\Theta}{d\theta}\varphi(\theta)\,d\theta - \int \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\theta\varphi(\theta)\,d\theta, \\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} &= m(m+1)\int \Theta\varphi(\theta)\,d\theta + 2(m+1)\int \frac{d\Theta}{d\theta}\theta\varphi(\theta)\,d\theta + \int \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

L'équation précédente prendra la forme

$$\left.\begin{aligned} \int \Theta[am(m+1) - mg + f]\varphi(\theta)\,d\theta + \int \frac{d\Theta}{d\theta}[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta)\,d\theta \\ + \int \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)\,d\theta = 0: \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

mais l'intégration par parties donnant

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{d\Theta}{d\theta}[2a(m+1)\theta - d\theta - b(m+1) + e]\varphi(\theta)\,d\theta &= \Theta[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta) \\ &\quad - \int \Theta\frac{d\cdot[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta)}{d\theta}\,d\theta, \\ \int \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)\,d\theta &= \frac{d\Theta}{d\theta}[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta) - \Theta\frac{d\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta} + \int \Theta\frac{d^2\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta^2}\,d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

elle deviendra en mettant à la place de Θ sa valeur.

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{1}{(x+\theta)^m}\left\{[am(m+1) - mg + f]\varphi(\theta) - \frac{d\cdot[2a(m+1)\theta - g\theta - l(m+1) + h]\varphi(\theta)}{d\theta}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{d^2\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta^2}\right\}d\theta \\ &+ \frac{1}{(x+\theta)^m}\left\{[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta) - \frac{d\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta}\right\} \\ &+ \frac{d\cdot}{d\theta}\frac{1}{(x+\theta)^m}[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pour satisfaire à cette équation on déterminera $\varphi(\theta)$ par

$$\left.\begin{aligned} [am(m+1) - mg + f]\varphi(\theta) - \frac{d\cdot[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta)}{d\theta} \\ + \frac{d^2\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta}{d\theta^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

et il ne restera ensuite qu'à prendre la variable θ entre deux limites propres à vérifier la relation

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(x+\theta)^m}\left\{[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta) - \frac{d\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta}\right\}\\&+ \frac{d\cdot}{d\theta}\frac{1}{(x+\theta)^m}[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)\end{aligned}\right\} = 0 \quad (11)$$

Pour cela, on choisira premièrement pour θ une valeur propre à annuler et à rendre indépendantes de x, les deux fractions

$$\frac{1}{(x+\theta)^m}, \qquad \frac{-m}{(x+\theta)^{m+1}} \quad (12)$$

ou bien les coefficients qui les multiplient. Puis, pour trouver l'autre limite de l'intégrale, on posera

$$\left.\begin{aligned}&[2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta) - \frac{d\cdot[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta}\\&[a\theta^2 - b\theta + c]\varphi(\theta) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

En substituant dans ces deux équations pour $\varphi(\theta)$ la valeur que l'équation (10) donnera pour cette fonction, savoir

$$\varphi(\theta) = C_1 f_1(\theta) + C_2 f_2(\theta), \quad (14)$$

en désignant par $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ les deux intégrales particulières de cette équation; par C_1, C_2 deux constantes arbitraires; éliminant ensuite une des constantes entre ces deux équations, l'autre disparaîtra d'elle-même et on arrivera à une équation ne renfermant que θ dont on prendra deux racines θ_1, θ_2 et qui seront autant de limites de l'intégrale (4). Mettant chacune de ces valeurs de θ dans une des équations (13), on en déduira deux valeurs correspondantes de C_2 en fonction de C_1, savoir:

$$C_2 = -C_1\frac{f_1(\theta_1)}{f_2(\theta_1)}, \qquad C_2 = -C_1\frac{f_1(\theta_2)}{f_2(\theta_2)}; \quad (15)$$

si l'on se sert de la seconde de ces équations.

Ces deux valeurs de la constante arbitraire C_2 conduisent à deux valeurs différentes de $\varphi(\theta)$; et comme l'équation (10) est linéaire et du second ordre, leur somme sera son intégrale générale.

Changeant un peu la forme des constantes arbitraires, il est clair que l'on aura

$$\left.\begin{aligned}y = {}& C_1\int_{\theta_1}^{h_1}\frac{f_2(\theta_1)f_1(\theta) - f_1(\theta_1)f_2(\theta)}{(x+\theta)^m}d\theta\\&+ C_2\int_{\theta_2}^{h_1}\frac{f_2(\theta_2)f_1(\theta) - f_1(\theta_2)f_2(\theta)}{(x+\theta)^m}d\theta\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

si l'on a désigné par h_1 la valeur de θ qui rend nulle la fonction du premier membre de l'équation (11).

On trouverait donc l'intégrale de l'équation proposée si l'on savait intégrer l'équation (10).

Pour cela, posons

$$am(m+1) - mg + f = 0: \quad (17)$$

l'équation (10) se réduisant à ses deux derniers termes, on aura de suite, par l'intégration

$$\frac{d\cdot[a\theta_2 - b\theta + c]\varphi(\theta)}{d\theta} - [2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h]\varphi(\theta) = C; \quad (18)$$

en désignant par C une constante arbitraire. Cette équation étant aussi du premier ordre et du premier degré, si l'on fait, pour abréger

$$\frac{2a(m+1)\theta - g\theta - b(m+1) + h}{a\theta^2 - b\theta + c} = {}^{(1)}f(\theta) \tag{19}$$

on aura

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{a\theta^2 - b\theta + c}\left[C\int e^{-\int {}^{(1)}f(\theta)\,d\theta}\,d\theta + C_1\right]e^{-\int {}^{(1)}f(\theta)\,d\theta}; \tag{20}$$

où C_1 est une nouvelle constante arbitraire.

II.

L'équation (17) donnant deux valeurs pour m on choisira celle qui facilitera la détermination de la valeur h de θ propre à faire disparaître la fonction du premier membre de l'équation (11).

On peut aussi déterminer m par l'équation

$$am(m-1) - g(m-1) + f = 0, \tag{21}$$

que l'on obtient en exécutant les différentiations indiquées dans l'équation (10) et égalant à zéro le coefficient de $\varphi(\theta)$. On arrivera à une équation de la forme

$$(a_1 + b_1\theta)\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} + (a_2 + b_2\theta + c_2\theta^2)\frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2} = 0, \tag{22}$$

que l'on peut intégrer de suite.

Des quatre valeurs fournies pour m par les équations (17) et (21), on choisira celle qui conviendra le mieux pour faciliter la détermination de la valeur h_1 de θ propre à faire évanouir, et à rendre indépendant de x, la fonction du premier membre de l'équation (11). Souvent on trouvera plus d'une valeur pour cette variable satisfaisant à cette condition.

Je dois observer ici que l'équation (3) a été déjà intégrée par M. Liouville (V. Journal de l'Ecole Polyt., 21ième cahier) à l'aide de son *Calcul des différentielles à indices fractionnaires;* mais je n'ai cru pas inutile de faire voir que l'on pouvait intégrer cette équation au moyen de l'Analyse ordinaire et arriver ainsi à des résultats débarrassés de cette incertitude que ce calcul laisse encore subsister dans la solution des problèmes qu'il résout.

Généralisation de la méthode donnée dans le paragraphe précédent pour l'intégration ou transformation des équations différentielles linéaires. Réduction des fonctions d'une seule variable à la forme

$$\int_\alpha^\beta \frac{f_1(\theta)}{(x+\theta)^m}\,d\theta$$

III.

La transformation que nous venons d'exécuter sur l'équation (3) peut s'étendre à une équation linéaire d'un ordre quelconque, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles.

Pour le faire mieux voir, commençons par faire disparaître les dénominateurs de tous les coefficients de la proposée, et puis différentions-la une ou plusieurs fois, s'il le faut, pour qu'elle se réduise à la forme

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(0)}y + \left(a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x\right)\frac{dy}{dx} + \left(a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + a_2^{(2)}x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots + \left(a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \cdots\cdots + a_{n-1}^{(n)}x^{n-1} + a_n^{(n)}x^n\right)\frac{d^ny}{dx^n} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

c'est-à-dire pour que le degré de chaque polynome coefficient soit égal ou inférieur au nombre qui marque l'ordre de la dérivée qu'il multiplie.

Posons

$$y = \int \frac{\varphi(\theta)}{(\theta - x)^m}\, d\theta; \quad (24)$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction à déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale.

Substituons cette expression de y dans la proposée: mais pour mieux voir les résultats auxquels on arrivera, voyons la forme que prendra chacun de ses termes séparément. Pour cela, faisons premièrement, pour abréger,

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + a_2^{(n)}x^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}^{(n)}x^{n-1} + a_n^{(n)}x^n: \quad (25)$$

on aura

$$f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = m(m+1)\cdots(m+n-1)\int \frac{\varphi(\theta)\, f_n(x)}{(\theta - x)^{m+n}}\, d\theta; \quad (26)$$

ou

$$f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)}\int \frac{\varphi(\theta)\, f_n(x)}{(\theta - x)^{m+n}}\, d\theta \quad (27)$$

d'après la notation connue

$$\Gamma(i) = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(i-1). \quad (28)$$

Développant $f_n(x)$ suivant les puissances ascendantes de $\theta - x$ on aura aussi

$$f_n(x) = f_n(\theta) - f'(\theta)\frac{(\theta - x)}{1} + f''(\theta)\frac{(\theta - x)^2}{1\cdot 2} - \cdots\cdots + (-1)^n f^{(n)}(\theta)\frac{(\theta - x)^n}{1\cdot 2\cdots n} \quad (29)$$

désignant par $f^{(m)}(\theta)$ le coefficient différentiel de l'ordre m du polynome $f_n(x)$ lorsqu'on y met θ à la place de x.

L'équation (27) deviendra

$$\left.\begin{aligned} f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)}\int \varphi(\theta)\left[\frac{f_n(\theta)}{(\theta - x)^{m+n}} - \frac{f_n'(\theta)}{(\theta - x)^{m+n-1}} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{f_n''(\theta)}{(\theta - x)^{m+n-2}} - \cdots\cdots\right. \\ \left. + (-1)^n\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\frac{f^{(n)}(\theta)}{(\theta - x)^m}\right] d\theta: \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

mais comme on peut faire

$$\frac{1}{(\theta - x)^{m+p}} = (-1)^p\frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)}\frac{d^p}{d\theta^p}\cdot\frac{1}{(\theta - x)^m}, \quad (31)$$

et poser pour abréger

$$\frac{1}{(\theta - x)^m} = \Theta. \quad (32)$$

elle se transformera encore en

$$\left.\begin{aligned} f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)}\int \varphi(\theta)\left[(-1)^n\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)}f_n(\theta)\frac{d^n\Theta}{d\theta^n} - (-1)^{n-1}\frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)}f_n'(\theta)\frac{d^{n-1}\cdot\Theta}{d\theta^{n-1}}\right. \\ \left. + \frac{(-1)^{n-2}}{1\cdot 2}\frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m)}f_n''(\theta)\frac{d^{n-2}\cdot\Theta}{d\theta^{n-2}} - \cdots\cdots + (-1)^n\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}f_n^{(n)}(\theta)\,\Theta.\right] d\theta, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

ou

$$f_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \Gamma(m+n)}{[\Gamma(m)]^2}\int \varphi(\theta)\left[\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(1)} f_n(\theta)\frac{d^n.\Theta}{d\theta^n} + \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(2)} f_n'(\theta)\frac{d^{n-1}.\Theta}{d\theta^{n-1}}\right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(3)} f_n''(\theta)\frac{d^{n-2}.\Theta}{d\theta^{n-2}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{f_n^{(n)}(\theta)}{\Gamma(n+1)}\Theta\right] d\theta, \qquad (34)$$

Cela posé, si l'on fait

$$\sum_0^n \frac{(-1)^n \Gamma(m+n)\,\Gamma(m+n-p)}{\Gamma(p+1)} f_n^{(p)}(\theta) = {}^{(p)}_n f(\theta), \qquad (35)$$

l'équation proposée deviendra

$$\int\left[{}^{(0)}f(\theta)\frac{d^n\Theta}{d\theta^n} + {}^{(1)}f(\theta)\frac{d^{n-1}.\Theta}{d\theta^{n-1}} + \cdots\cdots + {}^{(n-1)}f(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta} + {}^{(n)}f(\theta)\Theta\right]\varphi(\theta)\,d\theta = 0. \qquad (36)$$

Par des intégrations successives par parties on aura

$$\int {}^{(i)}f(\theta)\frac{d^{n-i}.\Theta}{d\theta^{n-i}}\varphi(\theta)\,d\theta = [\Theta]_{n-i} + (-1)^{n-i}\int\Theta\frac{d^{n-i}.[{}^{(i)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta^{n-i}}\,d\theta, \qquad (37)$$

où l'on désigne par

$$[\Theta]_{n-i} \qquad (38)$$

une fonction de x et de θ, débarrassée du signe d'intégration et où cette dernière variable doit être prise entre deux limites convenables.

L'équation (36) deviendra

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{1}{(\theta-x)^m}\left[{}^{(n)}f(\theta)\varphi(\theta) - \frac{d.[{}^{(n-1)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta} + \frac{d^2.[{}^{(n-2)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta^2} - \cdots\cdots + (-1)^n\frac{d^n.[{}^{(0)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta^n}\right]d\theta\\ &+\left[\frac{1}{(\theta-x)^m}\right]_1 + \left[\frac{1}{(\theta-x)^m}\right]_2 + \cdots\cdots + \left[\frac{1}{(\theta-x)^m}\right]_n\end{aligned}\right\} = 0. \qquad (39)$$

Puisque la fonction $\varphi(\theta)$ doit être indépendante de x, il faut que l'on ait séparément

$$\left.\begin{aligned}&{}^{(n)}f(\theta)\varphi(\theta) - \frac{d.[{}^{(n-1)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta} + \frac{d^2.[{}^{(n-2)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta^2} - \cdots\cdots\\ &+ (-1)^n\frac{d^n.[{}^{(n)}f(\theta)\varphi(\theta)]}{d\theta^n} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

$$\left[\frac{1}{(\theta-x)^m}\right]_1 + \left[\frac{1}{(\theta-x)^m}\right]_2 + \cdots\cdots + \left[\frac{1}{(\theta-x)^m}\right]_n = 0. \qquad (41)$$

La première de ces équations détermine $\varphi(\theta)$ et la seconde les limites que l'on doit donner à l'intégrale (24). Cette détermination se fait comme pour l'équation aux limites (11) relatives à l'équation du second ordre (3).

En effet, il est premièrement facile de voir que l'égalité (41) est de la forme

$$\frac{F_0(\theta)}{(\theta-x)^m} + \frac{F_1(\theta)}{(\theta-x)^{m+1}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{F_{n-1}(\theta)}{(\theta-x)^{m+n-1}} = 0, \qquad (42)$$

$F_i(\theta)$ étant une fonction de θ indépendante de x. On déterminera une première valeur de θ propre à rendre nuls à la fois tous les termes de cette équation. On trouvera généralement plus d'une valeur satisfaisant à cette condition et dont on pourra profiter; mais généralement c'est par le procédé suivant que l'on déterminera les autres valeurs de θ.

Posons

$$F_0(\theta) = 0, \quad F_1(\theta) = 0, \quad \cdots, \quad F_{n-1}(\theta) = 0, \tag{43}$$

et substituons dans ces équations la valeur de $\varphi(\theta)$ donnée par l'intégration de l'équation (40), valeur qui renferme n constantes arbitraires, éliminons à leur moyen $n-1$ de ces constantes, l'autre disparaîtra d'elle-même et l'on arrivera à une équation en θ seulement que je désignerai par

$$\tilde{\omega}(\theta) = 0, \tag{44}$$

de laquelle on déduira n valeurs $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n$ pour θ.

Si l'on désigne par

$$\varphi(\theta) = {}_1C\,{}_1f(\theta) + {}_2C\,{}_2f(\theta) + \cdots\cdots + {}_nC\,{}_nf(\theta), \tag{45}$$

l'intégrale que l'on a trouvée pour l'équation (40), et si l'on porte une des valeurs θ_i de θ dans $n-1$ des équations (43), elles donneront les valeurs de toutes les constantes arbitraires en fonction d'une seule d'entre elles; C_1 par exemple. Les résultats auxquels on arrivera seront de la forme

$$C_2 = {}_1C_{(2)}f(\theta_i), \quad C_3 = {}_1C_{(3)}f(\theta_i), \quad \cdots, \quad C_n = {}_1C_{(n)}f(\theta_i); \tag{46}$$

ce qui transformera la valeur précédente de $\varphi(\theta)$ en

$$\varphi(\theta) = {}_1C\,[{}_1f(\theta) + {}_{(2)}f(\theta_i)\,{}_2f(\theta) + \cdots\cdots + {}_{(n)}f(\theta_i)\,{}_nf(\theta)]; \tag{47}$$

ou

$$\varphi(\theta) = {}_1C\,\Pi_i(\theta) \tag{48}$$

en posant, pour abréger,

$${}_1f(\theta) + {}_{(2)}f(\theta_i)\,{}_2f(\theta) + \cdots\cdots\cdots + {}_{(n)}f(\theta_i)\,{}_nf(\theta) = \Pi_i(\theta). \tag{49}$$

Si l'on désigne donc par h la valeur de θ qui a fait évanouir tous les termes de l'équation (42) on aura

$$y = {}_1C\int_{\theta_i}^{h}\frac{\Pi_i(\theta)}{(\theta-x)^m}\,d\theta \tag{50}$$

pour une des intégrales particulières de l'équation proposée. Prenant d'autres constantes arbitraires pour les autres valeurs que nous avons déterminées pour θ on aura

$$y = {}_1C\int_{\theta_1}^{h}\frac{\Pi_1(\theta)}{(\theta-x)^m}\,d\theta + {}_2C\int_{\theta_2}^{h}\frac{\Pi_2(\theta)}{(\theta-x)^m}\,d\theta + \cdots\cdots + C^n\int_{\theta_n}^{h}\frac{\Pi_n(\theta)}{\theta-x)^m}\,d\theta, \tag{51}$$

pour l'intégrale générale.

IV.

On arriverait de cette manière à mettre la fonction y sous la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(\theta)}{(\theta-x)^m}\,d\theta, \tag{52}$$

si l'on savait intégrer l'équation (40), et tant que le problème est possible, ce qui a lieu pour des formes extrêmement générales de la fonction y, ainsi qu'il résulte de la transformation même que nous venons d'exécuter, laquelle n'est limitée que par l'impossibilité de trouver des valeurs de θ propres à rendre nulle la fonction du premier membre de l'équation (42).

Cette transformation, ainsi que celle dont il a été question antérieurement et qui a pour but de ramener une fonction quelconque y à la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{h\theta x}\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{53}$$

est d'une très-grande importance en Analyse, car, ainsi que je l'ai déjà fait observer, en partant de la dernière transformation, on réduit par là toutes les opérations que l'on a exécutées sur la fonction, et qui peuvent être très-compliquées, aux mêmes opérations exécutées sur les simples fonctions élémentaires

$$\frac{1}{(\theta - x)^m}, \qquad e^{h\theta x}; \tag{54}$$

c'est-à-dire sur les fonctions les plus simples de l'Analyse.

V.

Nous avons laissé dans ce qui précède la constante m indéterminée, ou du moins, pour déterminer h, nous n'avons qu'implicitement supposé qu'elle fût de la forme $\pm m \pm p$ ou bien $\pm p\sqrt{-1}$, mais la laissant indéterminée quant à sa valeur numérique. Or, en disposant de la grandeur de son module ou même de sa forme qui n'est pas nécessairement donnée par les calculs du N° III, on parviendra à faciliter toutes les opérations qui y ont été développées.

Supposons que l'on donne premièrement à m une valeur particulière m_1; on déterminera alors une valeur pour θ faisant évanouir tous les termes de l'équation (42); je désignerai cette valeur par h_1 et par θ_1 une racine de l'équation (44). Donnant à présent à m d'autres valeurs $m_2, m_3, \cdots m_n$, et désignant respectivement par $h_2\ h_3 \cdots h_n$ et $\theta_2\ \theta_3 \cdots \theta_n$ les valeurs correspondantes de h et de θ, il est évident qu'on aura pour y une fonction de la forme

$$y = C_1\int_{\theta_1}^{h_1}\frac{\Pi_1(\theta)}{(\theta - x)^{m_1}}\,d\theta + C_2\int_{\theta_2}^{h_2}\frac{\Pi_2(\theta)}{(\theta - x)^{m_2}}\,d\theta + \cdots\cdots + C_n\int_{\theta_n}^{h_n}\frac{\Pi_n(\theta)}{(\theta - x)^{m_n}}\,d\theta. \tag{55}$$

Quand on ne trouve aucune difficulté dans la détermination des racines de l'équation (44) ainsi que des constantes $h_1\ h_2 \cdots h_n$, on doit être guidé dans le choix des quantités $m_1, m_2, \cdots m_n$, d'après la forme de l'équation (40), afin de faciliter son intégration. Or c'est ce qui arrive toujours quand l'équation à laquelle on applique la transformation précédente a la forme (23) que nous lui avons supposée.

En effet, il est facile de voir, reprenant les calculs du N° III que ${}^{(i)}f(\theta)$ est un polynome rationnel et entier du $(n-i)^{\text{ième}}$ degré; et que, par conséquent, ${}^{(n)}f(\theta)$ est une constante. L'équation (40) est donc de la forme

$$\left.\begin{aligned} b_0^{(0)}\varphi(\theta) + (b_0^{(1)} + b_1^{(1)}\theta)\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} + (b_0^{(2)} + b_1^{(2)}\theta + b_2^{(2)}\theta^2)\frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2} + \cdots\cdots\cdots \\ + (b_0^{(n)} + b_1^{(n)}\theta + b_2^{(n)}\theta^2 + \cdots + b_n^{(n)}\theta^n)\frac{d^n\varphi(\theta)}{d\theta^n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

les coefficients $b_0^{(0)}$, $b_0^{(1)}$, etc. étant des fonctions de m.

Donc si l'on suppose

$$b_0^{(0)} = 0, \tag{57}$$

son ordre baisse d'une unité en posant $\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} = \psi(\theta)$ car $\psi(\theta)$ sera déterminé par une équation de l'ordre $n-1$; une intégration exécutée sur $\psi(\theta)\,d\theta$ donnera ensuite $\varphi(\theta)$.

Au lieu de poser l'équation (57), on peut faire

$$^{(n)}f(\theta) = 0; \tag{58}$$

ce qui, à l'aide d'une intégration immédiate, réduit l'équation (40) à

$$^{(n-1)}f(\theta)\,\varphi(\theta) - \frac{d\cdot[^{(n-2)}f(\theta)\,\varphi(\theta)]}{d\theta} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}\cdot[^{(0)}f(\theta)\,\varphi(\theta)]}{d\theta^{n-1}} = C, \tag{59}$$

C étant une constante arbitraire.

Si donc l'équation proposée a directement d'elle-même la forme (23) sans qu'on en ait besoin d'aucune opération pour la ramener à cette forme, la transformation que nous venons d'exécuter a toujours l'avantage, sous le rapport de l'intégration de faire baisser le degré de son ordre d'une unité; et par conséquent, si l'équation d'où on est parti était du second ordre, on obtiendrait de suite son intégrale: c'est ce que l'on a vu dans le N° I.

Il importe d'observer que $b_0^{(0)}$, $^{(n)}f(\theta)$ étant deux polynomes du degré m, mais différents l'un de l'autre, chacune des deux équations (57), (58) fournira une valeur pour m et on choisira dans chaque cas particulier celui ou ceux qui conviennent le mieux à la détermination des quantités h_1, h_2 etc., θ_1, θ_2 etc.

Je dois aussi observer que, lorsqu'on prend une seule valeur de m et que l'on a donné à y la forme (51), on n'a qu'à intégrer une équation de la forme (40), tandis que si l'on prend les n valeurs pour cette constante on aura n équations de la même forme à traiter, ou bien une seule équation à paramètre variable, la variabilité ne se portant que sur les coefficients qui multiplient les variables indépendantes.

. . . .

. . . . . .

VI.

Nous avons supposé que l'équation à laquelle on voulait appliquer la méthode precédente était réduite à la forme (23), afin de faciliter l'exposition; mais le même procédé peut être appliqué directement à toute équation dont les coefficients sont des fonctions algébriques et rationnelles. Faisant disparaître les dénominateurs, soit

$$(p_1^{(i)} + p_1^{(i)}a + \cdots\cdots + p_r^{(i)}x^r\cdot)\frac{d^\rho y}{dx^\rho}, \tag{60}$$

l'un de ses termes, et n le nombre qui indique son ordre. Si, appliquant la transformation précédente, la différence $r-\rho$ est constamment négative ou égale à zéro pour tous ses coefficients, l'ordre de la transformée en θ est égal à n; au contraire, il est égal à $n+l$, si cette différence est positive et si l est la plus grande valeur que cette différence puisse acquérir.

Nous avons supposé jusqu'à présent que l'équation que l'on avait à traiter n'avait pas de second membre. Si cela arrivait la méthode précédente serait encore applicable si le second membre se présentait sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{R_1^{(1)}}{(r_1-x)^{m_1}} + \dfrac{R_1^{(2)}}{(r_1-x)^{m_1+1}} + \dfrac{R_1^{(3)}}{(r_1-x)^{m_1+1}} + \text{etc.} \\ + \dfrac{R_2^{(1)}}{(r_2-x)^{m_2}} + \dfrac{R_2^{(2)}}{(r_2-x)^{m_2+1}} + \dfrac{R_2^{(3)}}{(r_2-x)^{m_2+1}} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{61}$$

Supposons premièrement que ce second membre se réduise simplement à

$$\frac{R_1^{(1)}}{(r_1-x)^{m_1}} + \frac{R_1^{(2)}}{(r_1-x)^{m_1+1}} + \frac{R_1^{(3)}}{(r_1-x)^{m_1+2}} + \text{etc.}; \tag{62}$$

le premier membre de l'équation (42) ne sera plus égal à zéro mais à cette fonction-ci; et il est évident que pour la satisfaire on doit faire $m = m_1$, $\theta = r_1$ et prendre une autre valeur b_1 propre à la faire évanouir.

Les équations

$$F_0(r_1) = -R_1^{(1)}, \quad F_1(r_1) = -R_1^{(2)}, \quad \text{etc.} \quad F_{n-1}(r_1) = -R_1^{(n)}, \tag{63}$$

détermineront ensuite les n constantes qui entrent dans l'expression de $\varphi(\theta)$; et si l'on désigne par $\psi_1(\theta)$ la valeur que prendra cette fonction, on aura

$$y = \int_{r_1}^{b_1} \frac{\psi_1(\theta)}{(\theta-x)^{m_1}}\, d\theta. \tag{64}$$

Si l'on suppose à présent que le second membre de la proposée au lieu de (62) soit de la forme (61) ou bien renferme dans son expression un nombre quelconque de termes de la forme (61), il est clair que l'on trouvera

$$y = \int_{r_1}^{b_1} \frac{\psi_1(\theta)}{(\theta-x)^{m_1}}\, d\theta + \int_{r_2}^{b_2} \frac{\psi_2(\theta)}{(\theta-x)^{m_2}}\, d\theta + \text{etc.} \tag{65}$$

$\psi_i(\theta)$ désignant ce qui devient $\psi_1(\theta)$ quand on remplace m_1 par m_i.

Cette valeur de y ne renferme aucune constante arbitraire; mais on la joindra à une quelconque de celles que nous avons déterminées précédemment (51), (55), pour le cas où le second membre de l'équation était égal à zéro, et on remplacera m_1, m_2, $\cdots$ m_n, par d'autres constantes ${}_1m$, ${}_2m$, $\cdots$, ${}_nm$, afin qu'elles ne se confondent pas avec celles que nous avons dernièrement écrites; on aura ainsi l'expression complète de y.

VII.

On peut facilement appliquer la méthode précédente à la transformation des équations simultanées d'un nombre quelconque de variables.

On l'étendra également aux équations aux différentielles partielles à un nombre quelconque de variables. Supposant, en effet, que l'on ait l'équation linéaire

$$F\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \text{etc.}\right) = F_1(x, y) \tag{66}$$

d'un ordre quelconque et dont les coefficients sont des fonctions algébriques et rationnelles de y; posons

$$u = \iint \frac{\varphi(\theta_1, {}_1\theta)}{(\theta_1 - x)^{m_1} ({}_1\theta - y)^{m}} d\theta_1 \, d_1\theta, \tag{67}$$

et exécutons des opérations analogues à celles que nous venons d'exécuter, on arrivera à une équation linéaire à deux variables et aux différentielles partielles pour déterminer $\varphi(\theta_1, {}_1\theta)$ et à une autre pour déterminer les limites de l'intégrale.

VIII.

On aura, sans doute remarqué l'analogie qu'il y a entre la méthode que l'on vient de lire et celle que LAPLACE a donnée dans sa *Théorie analytique des probabilités*, dont nous avons eu plus d'une fois occasion de faire mention dans le cours de ce Mémoire. Nos intégrales se présentant sous la forme (67), se prêtent à la plupart des transformations que ce grand géomètre a appliquées aux intégrales de la forme

$$\int_\alpha^\beta e^{\theta x} f(\theta) \, d\theta, \quad \text{ou} \quad \int_\alpha^\beta \theta^x f(\theta) \, d\theta, \tag{68}$$

et par exemple, à la transformation de ces fonctions en séries convergentes.

Je remarquerai ici que si l'on applique cette transformation de LAPLACE, en posant

$$y = \int e^{\theta x} \varphi(\theta) \, d\theta, \tag{69}$$

dans l'équation (23), on trouvera pour déterminer $\varphi(\theta)$ une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned} (b_0^{(0)} + b_1^{(0)}\theta + \cdots\cdots + b_n^{(0)}\theta^n)\varphi(\theta) + (b_1^{(1)}\theta + b_2^{(1)}\theta^2 + \cdots\cdots + b_n^{(1)}\theta^n)\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} + \cdots\cdots \\ + (b_0^{(n)} + b_1^{(n)}\theta + \cdots\cdots + b_n^{(n)}\theta^n)\frac{d^n\varphi(\theta)}{d\theta^n} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

qui se transforme en

$$\left.\begin{aligned} (c_0^{(0)} + c_1^{(0)}\theta + \cdots\cdots + c_{n-1}^{(0)}\theta^{n-1})\psi(\theta) + (c_0^{(1)} + c_1^{(1)}\theta + \cdots\cdots + c_{n-1}^{(1)}\theta^{n-1})\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} + \cdots\cdots \\ + (c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\theta + \cdots\cdots + c_{n-1}^{(n)}\theta^{n-1})\frac{d^n\psi(\theta)}{dt} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

si l'on pose

$$\varphi(\theta) = \theta^\delta \psi(\theta), \tag{72}$$

et si l'on détermine δ par l'équation

$$b_0^{(0)} + b_1^{(1)}\delta + b_2^{(2)}\delta(\delta - 1) + \cdots\cdots + b_n^{(n)}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - n + 1) = 0. \tag{73}$$

Si l'on applique maintenant de nouveau à l'équation (71) la même transformation, en posant

$$\psi(\theta) = e^{\theta\xi}\Omega(\xi)\, d\xi, \tag{74}$$

on trouvera pour déterminer $\Omega(\xi)$ une équation linéaire de l'ordre $n - 1$ seulement.

L'ensemble de ces opérations fait donc baisser d'un unité l'ordre de l'équation proposée. Nous avons vu pourtant plus haut qu'il était possible de faire cela plus simplement à l'aide d'une seule intégrale définie.

IX.

Comme application des transformations précédentes, je vais montrer comme on peut s'en servir pour déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\int_0^\infty [f(x)]^\theta \varphi(x\theta)\, d\theta = F(x). \tag{75}$$

Posons

$$\varphi(\theta) = \int_\alpha^\beta e^{h\theta\omega} \psi(\omega)\, d\omega : \tag{76}$$

on aura

$$\int_\alpha^\beta \psi(\omega)\, d\omega \int_0^\infty e^{-\theta[l\cdot f(x) - h\omega x]}\, d\theta = F(x), \tag{77}$$

ou

$$\int_\alpha^\beta \frac{\psi(\omega)\, d\omega}{\frac{l\cdot f(x)}{x} - h\omega} = x F(x), \tag{78}$$

si l'on intègre par rapport à θ et si l'on suppose que l'on ait

$$l\cdot f(x) - h\omega x > 0. \tag{79}$$

Posons

$$\frac{l\cdot f(x)}{x} = y, \tag{80}$$

et désignons par $x = {}_1f(y)$ la valeur de x que l'on déduit de cette équation; on aura

$$\int_\alpha^\beta \frac{\psi(\omega)\, d\omega}{y - h\omega} = {}_1f(y)\, F[{}_1f(y)] = {}_1F(y). \tag{81}$$

Cela posé si l'on met $F_1(y)$ sous la forme

$$F_1(y) = \int_a^b \frac{{}_1F(\omega)}{y - k\omega}, \tag{82}$$

on satisfera à l'équation précédente si l'on fait

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad h = k, \quad \psi(\omega) = {}_1F(\omega). \tag{83}$$

Dans le cas très-étendu où l'on pourra faire usage de la formule (19), on aura

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x\omega\sqrt{-1}}\, {}_1f(\omega\sqrt{-1})\, F[{}_1f(\omega\sqrt{-1})]\, d\omega \tag{84}$$

Sur l'analogie

entre

les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ordinaires.

I.

Avant de posséder des méthodes rigoureuses pour résoudre les équations numériques, les géomètres avaient déjà étudié la manière dont les coefficients d'une équation quelconque algébrique sont composés en fonctions des racines de la même équation. Les équations qui expriment ces rapports sont en même nombre que les inconnues, mais elles ne servent pas pour résoudre la question proposée, puisqu'on arrive, par l'élimination, à une équation exactement de la même forme que celle dont on était parti. Mais si cette théorie ne pouvait pas conduire à la résolution des équations algébriques, ce qui, d'après les travaux d'ABEL, est aujourd'hui démontré impossible (en fonctions algébriques, bien entendu), il est bien sûr qu'elle a été de la plus grande importance pour la découverte de plusieurs théorèmes fondamentaux dans la théorie générale des fonctions algébriques et pour la création de la théorie des fonctions symétriques, qui, depuis les Mémoires imprimés en 1770 et 1771 dans le Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin, occupe une place si importante dans l'Analyse mathématique.

Est-ce qu'il ne serait pas possible d'établir la même chose pour les équations différentielles linéaires? Comme étant des équations, elles doivent jouir de plusieurs propriétés qui appartiennent aux équations algébriques ou transcendantes. Ainsi, par exemple, il est évident que ces coefficients doivent être des fonctions symétriques des intégrales particulières; c'est en effet ce que l'on a déjà démontré; on a aussi démontré quelques autres propriétés dont jouissent ces équations differentielles, qui tendent à les rapprocher des équations algébriques. Je vais entrer dans quelques considérations et donner un théorème; ce qui fera mieux ressortir cette analogie. Etablissons premièrement quelques définitions.

II.

Toute fonction, qui mise à la place de x dans l'équation

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \ldots + k x + l = 0, \tag{1}$$

la vérifie, est appelée *racine* de cette équation.

Désignons maintenant par y_1 une intégrale particulière de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0; \tag{2}$$

c'est-à-dire une fonction qui, mise à la place de y, satisfasse à cette équation, nous dirons que y est une *racine différentielle* de l'équation (2), généralisant le sens que l'on donne au mot *racine*.

Il y a certaines fonctions de la variable indépendante qui satisfont aux équations différentielles et qui ne sont pas obtenues au moyen de l'intégration, ce sont les solutions singulières. Nous les nommerons *racines différentielles étrangères*, les assimilant aux racines qui, dans les équations algébriques ordinaires, s'introduisent dans le calcul à cause de l'imperfection de nos méthodes, mais que l'on doit exclure ensuite du résultat final.

J'appellerai aussi *racine différence* toute fonction qui mise à la place de y_x satisfait à l'équation

$$P_n \Delta^n y_x + P_{n-1} \Delta^{n-1} y_x + \ldots + P_1 \Delta y_x + P_0 y_x = 0, \tag{3}$$

ou

$$P_n y_{x+n} + P_{n-1} y_{x+n-1} + \ldots + P_1 y_{x+1} + P_0 y_x = 0. \tag{4}$$

Généralement ayant l'équation

$$f(x, y) = 0$$

où la variable y se trouve liée à la variable x par une loi absolument quelconque, je nommerai *racine* de cette équation toute fonction qui mise à la place de y satisfait à cette équation. Puis, d'après la nature de cette équation, suivant qu'elle sera algébrique, transcendante, aux différentielles, aux différences, etc., on ajoutera au mot *racine* un adjectif pour exprimer plus explicitement de quel genre est la racine dont il s'agit ou bien pour faire voir la nature de l'équation proposée et le genre d'opérations qu'il faut exécuter pour arriver à sa détermination.

Nous restreignant dans cet article aux équations (2), (4), nous allons montrer comment on peut les rapprocher des équations algébriques ordinaires.

Voyons premièrement comment les coefficients

$$P_n, \quad P_{n-1} \ldots \ldots P_1, \quad P_0,$$

qui entrent dans ces équations sont composés respectivement en fonctions des *racines différentielles* et *racines différences* des mêmes équations. Mais pour cela rappelons premièrement quelques formules connues.

III.

Désignant par D le *déterminant* des quantités

$$\left.\begin{array}{llll} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \cdots\cdots\cdots h_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \cdots\cdots\cdots h_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \cdots\cdots\cdots h_{n-1} \end{array}\right\} \tag{7}$$

on a comme on le sait,

$$D = \Sigma (\pm a_0 b_1 c_1 \cdots\cdots h_{n-1}).$$

Considérons aussi les équations

$$\left.\begin{array}{l} a_0 x + b_0 y + c_0 z + \cdots\cdots\cdots + h_0 t = k_0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots\cdots\cdots + h_1 t = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots\cdots\cdots + h_2 t = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \cdots\cdots + h_{n-1} t = k_{n-1}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Désignons par

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \cdots\cdots A_{n-1} \tag{9}$$

les déterminants mineurs qui, dans le développement du *déterminant*

$$\Sigma (\pm a_0 b_1 c_1 \cdots\cdots h_{n-1}), \tag{10}$$

multiplient respectivement les lettres

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \cdots\cdots a_{n-1}, \tag{11}$$

on aura

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} a_{n-1} = D; \tag{12}$$

mais, d'après les propriétés connues des *déterminants*, on a les équations

$$\left.\begin{array}{l} A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} a_{n-1} = D, \\ A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} b_{n-1} = 0, \\ A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} c_{n-1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} h_{n-1} = 0. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Multipliant les équations (81) respectivement par

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \cdots\cdots A_{n-1}, \tag{14}$$

et faisant leur somme, ayant en vue le système (13), les variables y, z, etc. disparaîtront et on aura pour x

$$\varphi = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} k_{n-1}}{A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots\cdots + A_{n-1} a_{n-1}}; \tag{15}$$

mais le dénominateur de cette fonction est le *déterminant* D, et le numérateur se déduit du dénominateur seulement par le changement de la lettre a en k, on a donc

$$x = \frac{\Sigma (\pm k_0 b_1 c_2 \cdots\cdots h_{n-1})}{\Sigma (\pm a_0 b_1 c_2 \cdots\cdots h_{n-1})}. \tag{16}$$

La valeur de x étant déterminée, les valeurs des autres variables s'en déduisent immédiatement par de simples permutations de lettres. On aura

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\Sigma(\pm k_0\, b_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0\, b_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})} \\ y &= \frac{\Sigma(\pm a_0\, k_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0\, b_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})} \\ z &= \frac{\Sigma(\pm a_0\, b_1\, k_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0\, b_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})} \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ t &= \frac{\Sigma(\pm a_0\, b_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot k_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0\, b_1\, c_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot h_{n-1})}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

IV.

Considérons maintenant l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre linéaire et sans second membre, savoir

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0. \quad (18)$$

Désignons par

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot y_n, \quad (19)$$

n fonctions de x qui la satisfont, la valeur

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + c_n y_n \quad (20)$$

sera, comme on sait, son intégrale générale.

Différentiant n fois de suite cette valeur de y on aura

$$\left.\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + c_n y_n' \\ y'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + c_n y_n'' \\ y''' &= c_1 y_1''' + c_2 y_2''' + c_3 y_3''' + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + c_n y_n''' \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y^{(n)} &= c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + c_3 y_3^{(n)} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + c_n y_n^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

en faisant usage de la notation de Lagrange.

Résolvant ces équations par les formules données dans le numéro précédent, en considérant

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot c_n \quad (22)$$

comme les inconnues, on aura les valeurs des mêmes quantités, lesquelles mises dans la valeur (20) de y, conduiront à une équation de la forme

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0, \quad (23)$$

d'où il est facile de conclure

$$P_n, \quad P_{n-1}, \quad P_n, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot P_1, \quad P_0, \quad (24)$$

en fonctions des intégrales particulières de l'équation (18).

C'est cette équation de l'ordre n que j'appellerai *équation type* du $n^{\text{ième}}$ ordre. Précisons mieux le sens que nous donnons à cette expression.

Eliminant les constantes qui se trouvent dans les $n+1$ équations (21) et celles qui donnent la valeur de y, on arrive à des résultats qui diffèrent les uns des autres d'après la marche que l'on aura suivie; pour que *l'équation type* reste donc toujours déterminée voici la marche que j'ai adoptée: je prends l'équation (20) et les $n-1$ premières équations (21) et, à leur moyen, je tire les valeurs des constantes c_1, c_2, etc., en me servant pour cela des formules données précédemment, je substituerai ces valeurs dans la dernière équation (21) et je range par rapport à

$$y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \ldots \cdot \frac{d^ny}{dx^n} \tag{25}$$

et je multiplie le tout par le *déterminant* . . .

$$D = \Sigma (\pm y_1 y_2' y_3'' \cdot \ldots \cdot y_n^{(n-1)}) : \tag{26}$$

le résultat ainsi obtenu est ce que nous appellerons *équation type* du $n^{\text{ième}}$ ordre.

V.

Cherchons les *équations types* du 1er, 2ième et 3ième ordre.

L'intégrale de l'équation linéaire du premier ordre est

$$y = c_1 y_1 ; \tag{27}$$

d'où

$$y' = c_1 y_1' ; \tag{28}$$

on a aussi

$$c_1 = \frac{y}{y_1} ; \tag{29}$$

et par suite

$$y' - \frac{y}{y_1} y_1' = 0 : \tag{30}$$

multipliant cette équation par y_1 qui est ce à quoi se réduit, dans le cas actuel, le *déterminant*

$$\Sigma (\pm y_1 y_2' y_3'' \cdot \ldots \cdot y_n^{(n-1)}) , \tag{31}$$

on trouve

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y_1' y = 0 ; \tag{32}$$

pour *l'équation type* du premier ordre. Dans cette équation les coefficients sont tels que la dérivée du premier est égale, mais de signe contraire, à celui du second, puisque

$$\frac{d \cdot y_1}{dx} = - (- y_1'). \tag{33}$$

L'intégrale générale de l'équation linéaire du second ordre est

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 . \tag{34}$$

Différentiant, on en déduit

$$\left.\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' , \\ y'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' . \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Des équations

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2, \\ y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2'; \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

on tire

$$c_1 = \frac{\Sigma(\pm y\, y_2')}{\Sigma(\pm y_1 y_2')}, \qquad c_2 = \frac{\Sigma(\pm y_1\, y')}{\Sigma(\pm y_1 y_2')}. \tag{37}$$

Substituant ces valeurs de c_1, c_2 dans l'équation

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''; \tag{38}$$

faisant passer tous les termes dans le premier membre et multipliant par

$$\Sigma(\pm y_1 y_2'), \tag{39}$$

on trouve

$$(y_1 y_2' - y_2 y_1')\frac{d^2y}{dx^2} - (y_1 y_2'' - y_2 y_1'')\frac{dy}{dx} + (y_1' y_2'' - y_2' y_1'')\, y = 0 \tag{40}$$

pour *l'équation type* du second ordre.

Dans cette équation le coefficient de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est égal et de signe contraire à celui de $\frac{dy}{dx}$, puisque

$$\frac{d\cdot[y_1 y_2' - y_2 y_1']}{dx} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''. \tag{41}$$

L'intégrale de l'équation générale du troisième ordre étant

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3; \tag{42}$$

si l'on tire les valeurs de c_1, c_2, c_3 des équations

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3, \\ y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3', \\ y'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'', \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

on aura

$$c_1 = \frac{\Sigma(\pm y\, y_2' y_3'')}{\Sigma(\pm y_1 y_2' y_3'')}, \quad c_2 = \frac{\Sigma(\pm y_1\, y' y_3'')}{\Sigma(\pm y_1 y_2' y_3'')}, \quad c_3 = \frac{\Sigma(\pm y_1 y_2'\, y'')}{\Sigma(\pm y_1 y_2' y_3'')}, \tag{44}$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{(y_2' y_3'' - y_3' y_2'')\, y - (y_2 y_3'' - y_3 y_2'')\, y' + (y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y''}{(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1'' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2'' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3''}, \\ c_2 &= \frac{(y_3' y_1'' - y_1' y_3'')\, y - (y_3 y_1'' - y_1 y_3'')\, y' + (y_3 y_1' - y_1 y_3')\, y''}{(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1'' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2'' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3''}, \\ c_3 &= \frac{(y_1' y_2'' - y_2' y_1'')\, y - (y_1 y_2'' - y_2 y_1'')\, y' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y''}{(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1'' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2'' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3''}: \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

mettant dans l'équation

$$y''' = c_1 y_1''' + c_2 y_2''' + c_3 y_3'''; \tag{46}$$

faisant passer tous les termes dans le premier membre, ordonnant suivant les dérivées de y et multipliant le tout par

$$\Sigma(\pm y_1 y_2' y_3''), \tag{47}$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
&[(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1'' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2'' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3'']\, \frac{d^3y}{dx^3} \\
&- [(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1''' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2''' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3''']\, \frac{d^2y}{dx^2} \\
&+ [(y_2 y_3'' - y_3 y_2'')\, y_1''' - (y_1 y_3'' - y_3 y_1'')\, y_2''' + (y_1 y_2'' - y_2 y_1'')\, y_3''']\, \frac{dy}{dx} \\
&- [(y_2' y_3'' - y_3' y_2'')\, y_1''' - (y_1' y_3'' - y_3' y_1'')\, y_2''' + (y_1' y_2'' - y_2' y_1'')\, y_3''']\, y
\end{aligned}\right\} = 0 \qquad (48)$$

pour *l'équation-type* du troisième ordre.

Ici encore le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé est égal et de signe contraire à celui de l'ordre immédiatement inférieur.

VI.

Si l'on a maintenant une équation différentielle quelconque, il est toujours possible en la rapprochant des *équations types*, d'exprimer tous ses coefficients en fonctions de ses *racines différentielles*.

Supposons que l'on ait l'équation du second ordre

$$p \frac{d^2y}{dx^2} + q \frac{dy}{dx} + ry = 0; \qquad (49)$$

pour la comparer avec *l'équation-type* du même ordre nous devons la multiplier par un facteur z déterminé par l'équation

$$\frac{d \cdot (zp)}{dx} = - qz. \qquad (50)$$

L'équation résultante sera

$$pz \frac{d^2y}{dx^2} + qz \frac{dy}{dx} + rzy = 0; \qquad (51)$$

et nous pourrons établir les égalités

$$\left.\begin{aligned}
y_1 y_2' - y_2 y_1' &= pz, \\
y_1 y_2'' - y_2 y_1'' &= - qz, \\
y_1' y_2'' - y_2' y_1'' &= rz;
\end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

qui déterminent les coefficients de la proposée en fonction de ses intégrales particulières ou *racines différentielles*. Quand une équation du second ordre a la forme (51), nous disons qu'elle est *préparée*.

Ayant aussi l'équation générale du troisième ordre

$$p \frac{d^3y}{dx^3} + q \frac{d^2y}{dx^2} + r \frac{dy}{dx} + sy = 0, \qquad (53)$$

en la multipliant par un facteur z satisfaisant à la condition

$$\frac{d \cdot zp}{dx} = - qz, \qquad (54)$$

l'équation qui en résulte

$$pz \frac{d^3y}{dx^3} + qz \frac{d^2y}{dx^2} + rz \frac{dy}{dx} + szy = 0, \qquad (55)$$

sera préparée, d'après notre définition. En la comparant à l'équation-type du même ordre, on aura

$$\left.\begin{aligned}
(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1'' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2'' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3'' &= p z \\
(y_2 y_3' - y_3 y_2')\, y_1''' - (y_1 y_3' - y_3 y_1')\, y_2''' + (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, y_3''' &= -q z \\
(y_2 y_3'' - y_3 y_2'')\, y_1''' - (y_1 y_3'' - y_3 y_1'')\, y_2''' + (y_1 y_2'' - y_2 y_1'')\, y_3''' &= r z \\
(y_2' y_3'' - y_3' y_2'')\, y_1''' - (y_1' y_3'' - y_3' y_1'')\, y_2''' + (y_1' y_2'' - y_2' y_1'')\, y_3''' &= -s z.
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Des théorèmes analogues à ceux que nous venons de démontrer ont lieu dans les ordres supérieurs.

VII.

La même chose a lieu pour les équations aux différences finies.

Soit l'équation du second ordre

$$P_x \Delta^2 y_x + Q_x \Delta y_x + R_x y_x = 0, \quad (57)$$

ou encore

$$p_x y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0; \quad (58)$$

son intégrale pouvant être mise sous la forme

$$y_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)}, \quad (59)$$

on en déduit

$$\left.\begin{aligned}
y_{x+1} &= c_1 y_{x+1}^{(1)} + c_2 y_{x+1}^{(2)} \\
y_{x+2} &= c_1 y_{x+2}^{(1)} + c_2 y_{x+2}^{(2)};
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

suivant la même marche que précédemment on trouve

$$\left.\begin{aligned}
(y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)})\, y_{x+2} - (y_x^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+2}^{(1)})\, y_{x+1} \\
+ (y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+2}^{(1)})\, y_x = 0
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

pour *l'équation-type* des équations aux différences finies du second ordre.

Désignons par $f(x)$, $F(x)$ les coefficients de y_{x+2} et y_{x+1}; on voit de suite qu'il y a entre eux le rapport

$$f(x+1) = -F(x). \quad (62)$$

Il en résulte que si l'on veut comparer une équation quelconque aux différences finies du second ordre avec *l'équation-type* du même ordre, c'est-à-dire que si l'on a l'équation

$$p_x y_{x+2} + q_x y_{x+1} + r_x y_x = 0, \quad (63)$$

et si on veut la comparer à l'équation (61), on doit commencer par la multiplier par un facteur z_x, déterminé par l'équation

$$p_x z_{x+1} = -q_x z_x, \quad (64)$$

et l'équation résultante

$$p_x z_x y_{x+2} + q_x z_x y_{x+1} + r_x z_x y_x = 0, \quad (65)$$

qui est ce que nous appelons une équation *préparée,* fournira les théorèmes qui résultent des relations:

$$\left.\begin{aligned}
y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)} &= p_x z_x, \\
y_x^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+2}^{(1)} &= -q_x z_x, \\
y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+2}^{(1)} &= r_x z_x.
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Des théorèmes analogues ont lieu dans les ordres supérieurs.

VIII.

Les formules précédentes permettent de former des équations différentielles qui admettent des intégrales de telle ou telle forme donnée. Pour cela on n'a qu'à donner aux *racines différentielles* y_1, y_2, etc. les valeurs données et les mettre dans les coefficients des *équations-types;* l'équation qui en résultera satisfera au problème proposé. Supposons, par exemple, que l'on demande l'équation du second ordre qui a pour intégrales particulières $\frac{1}{x}$ et e^x. Faisant

$$y_1 = \frac{1}{x}, \qquad y_2 = e^x, \tag{67}$$

on trouve immédiatement

$$\left.\begin{aligned} y_1 y_2' - y_2 y_1' &= \frac{e^x (x+1)}{x^2}, \\ y_1 y_2'' - y_2 y_1'' &= \frac{e^x (x^2-2)}{x^3}, \\ y_1' y_2'' - y_2' y_1'' &= -\frac{e^x (x+2)}{x^3}; \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

et, par conséquent,

$$x(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2-2)\frac{dy}{dx} - (x+2)y = 0, \tag{69}$$

est l'équation qui satisfait au problème proposé.

On peut également chercher des équations dont les *racines* aient entre elles des rapports donnés, et dans plusieurs cas non seulement connaître la forme de ces équations, mais arriver à la détermination complète de leurs *racines.* Supposons que l'on demande la forme que doit avoir une équation différentielle du second ordre pour que ses *racines,* que je désignerai par y_1, y_2, aient entre elles le rapport

$$y_1 y_2 = 1. \tag{70}$$

Pour résoudre cette question, prenons l'équation générale du second ordre que l'on peut toujours écrire comme suit

$$p\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx} + ry = 0, \tag{71}$$

lorsqu'elle est *préparée.* En la rapprochant de *l'équation-type* du second ordre (40), afin de déterminer p et r en fonctions des *racines* y_1, y_2 on trouve

$$\left.\begin{aligned} y_1 y_2' - y_2 y_1' &= p, \\ y_1 y_2'' - y_2 y_1'' &= \frac{dp}{dx}, \\ y_1' y_2'' - y_2' y_1'' &= r. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Il s'agit de voir maintenant quel rapport il doit y avoir entre p et r quand les *racines* y_1, y_2 sont liées l'une à l'autre par l'équation

$$y_1 y_2 = 1. \tag{73}$$

L'équation

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = p \tag{74}$$

peut s'écrire ainsi:

$$y_1 y_2 \left(\frac{y_2'}{y_2} - \frac{y_1'}{y_1}\right) = p, \tag{75}$$

ou bien

$$\left(\frac{d\cdot\log y_2}{dx} - \frac{d\cdot\log y_1}{dx}\right) = p, \tag{76}$$

en se rappelant que le produit des *racines* est égal à l'unité. On peut mettre encore l'expression de p sous la forme

$$\frac{d\cdot\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = p \tag{77}$$

mais comme on a par hypothèse

$$y_1 = \frac{1}{y_2}, \tag{78}$$

on trouve

$$2\,\frac{d\cdot\log y_2}{dx} = p; \tag{79}$$

d'où, par l'intégration,

$$y_2 = C\,e^{\frac{1}{2}\int p\,dx}. \tag{80}$$

L'équation

$$y_1'\,y_2'' - y_2'\,y_1'' = r, \tag{81}$$

peut aussi s'écrire comme suit

$$y_2'\,y_1'\left(\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_1''}{y_1'}\right) = r, \tag{82}$$

ou bien

$$y_2'\,y_1'\left(\frac{d\cdot\log y_2'}{dx} - \frac{d\cdot\log y_1'}{dx}\right) = r, \tag{83}$$

ou encore

$$y_2'\,y_1'\,\frac{d\cdot\log\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)}{dx} = r: \tag{84}$$

mais puisque

$$y_1 = \frac{1}{y_2} \qquad y_1' = -\frac{y_2'}{y_2^2} \qquad y_1'\,y_2' = -\frac{y_2'^2}{y_2^2}, \qquad \frac{y_2'}{y_1'} = -y_2^2, \tag{85}$$

il en résulte

$$-\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^2\frac{d\cdot\log(-y_2^2)}{dx} = r; \tag{86}$$

ou bien, exécutant les différentiations indiquées,

$$\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^3 = -\frac{r}{2}; \tag{87}$$

de là on tire, par l'intégration,

$$y_2 = C_1\,e^{\int\sqrt[3]{-\frac{r}{2}}\,dx}. \tag{88}$$

Egalant les deux valeurs de y_2, on trouve

$$C\,e^{\frac{1}{2}\int p\,dx} = C_1\,e^{\int\sqrt[3]{-\frac{r}{2}}\,dx}; \tag{89}$$

prenant les logarithmes des deux membres, on trouve la relation très-simple

$$r = -\frac{1}{4}\,p^3, \tag{90}$$

qui doit avoir lieu entre r et p pour vérifier l'équation (71), qui se réduit alors à

$$p\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dp}{dx}\,\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}p^3\,y = 0. \tag{91}$$

On pourrait appeler l'équation précédente *équation réciproque du second ordre*, généralisant le mot *réciproque* employé dans la théorie générale des équations algébriques,

On trouverait avec une égale facilité le rapport qui doit avoir lieu entre p et r pour que les *racines* de l'équation (71) satisfassent à l'équation

$$y_1^m y_2^n = 1,$$

où m et n sont deux constantes quelconques; cette équation revient à

$$y_1 y_2^m = 1. \tag{93}$$

Par les calculs analogues à ceux que nous avons exécutés précédemment, on trouve d'abord

$$y_2 = \sqrt[1-m]{\frac{1-m}{1+m}\int p\,dx + C}; \tag{94}$$

puis

$$y_2 = \sqrt[\frac{1-m}{3}]{\frac{1-m}{3}\int \sqrt[3]{-\frac{r}{m(m+1)}}\,dx + C_1}; \tag{95}$$

égalant ces deux valeurs, on déduit

$$\left(\frac{1-m}{3}\int \sqrt[3]{-\frac{r}{m(m+1)}}\,dx + C_1\right)^3 = \frac{1-m}{1+m}\int p\,dx + C, \tag{96}$$

pour l'équation qui indique le rapport qui doit exister entre p et r pour que les *racines différentielles* de l'équation (71) aient entre elles le rapport

$$y_1 y_2^m = 1, \tag{97}$$

quelque soit m.

Donnons un exemple de ce dernier cas. L'équation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \tag{98}$$

se réduit après avoir été *preparée*, à

$$\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{x^5}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^6}y = 0, \tag{99}$$

et celle-ci comparée à l'équation (71) donne pour p et r les valeurs

$$p = \frac{1}{x^4}, \qquad r = \frac{2}{x^6}. \tag{100}$$

Remplaçant, dans l'équation (96); p et r par ces valeurs, nous déterminerons m pour que cette équation soit vérifiée. En faisant la substitution on trouve l'équation

$$\left(-\frac{1-m}{3}\sqrt[3]{-\frac{2}{m(m+1)}}\frac{1}{x} + C_1\right)^3 = \frac{1-m}{1+m}\frac{-1}{3x^3} + C, \tag{101}$$

et si l'on suppose

$$C_1 = 0, \qquad C = 0, \qquad m = -2, \tag{102}$$

on trouve que, dans ce cas, l'équation (95) donne

$$y_2 = \frac{1}{x}; \tag{103}$$

ce qui est effectivement une des intégrales particulières de l'équation proposée.

L'autre que l'on déduit de l'égalité $y_1 y_2^m = 1$ est égale à

$$y_1 = \frac{1}{x^3}. \tag{104}$$

Ce qui satisfait encore à la même équation.

IX.

Si

$$y = F(x) \tag{105}$$

représente l'intégrale d'une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont les coefficients sont des fonctions algébriques et rationnelles, et si d'ailleurs la fonction $F(x)$ contient des transcendantes quelconques, multipliant y et ses dérivées successives respectivement par les fonctions

$$f(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \cdots f_n(x), \tag{106}$$

algébriques et rationnelles, et telles que l'équation

$$f(x)\,y + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = 0, \tag{107}$$

ait lieu, il faut nécessairement que les transcendantes qui entrent dans la fonction $F(x)$ ou se soient détruites mutuellement, dans la somme que l'on a faite des seconds membres des équations

$$\left.\begin{aligned} y\,f(x) &= F(x)\,f(x), \\ \frac{dy}{dx}f_1(x) &= F'(x)\,f_1(x), \\ \frac{d^2y}{dx^2}f_2(x) &= F''(x)\,f_2(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

ou bien qu'elles soient devenues des facteurs communs à touts les termes et aient disparu par la division.

Cela peut être regardé comme le principal obstacle que présente l'intégration des équations différentielles: en effet des équations différentielles qui diffèrent à peine par leurs coefficients admettent pourtant pour leurs intégrales des fonctions très-différentes, lesquelles deviennent les facteurs communs transcendants à tous les termes de l'équation, et par conséquent disparaissent sans laisser la moindre trace de leur existence.

Il s'ensuit que toute méthode qui aura pour but de restituer ces facteurs aux équations différentielles doit être très-utile pour leur intégration. Or, on a vu qu'on arrive à cela au moyen de nos *équations-types.*

Il est facile de voir l'usage que l'on peut faire de ces équations pour trouver des intégrales de formes données. On commence par *préparer* l'équation proposée, c'est-à-dire que si l'on a l'équation

$$P_n\frac{d^ny}{dx^n} + P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = 0, \tag{109}$$

on doit la multiplier par un certain facteur z déterminé par l'équation

$$\frac{d \cdot P_n z}{dx} = - P_{n-1} z : \tag{110}$$

on aura

$$P_n z \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} z \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + P_1 z \frac{dy}{dx} + P_0 z y = 0. \tag{111}$$

Comparant maintenant cette équation avec *l'équation-type* du $n^{\text{ième}}$ ordre, que je désignerai par

$$D_n \frac{d^n y}{dx^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + D_1 \frac{dy}{dx} + D_0 y = 0, \tag{112}$$

il est évident qu'on trouvera les égalités

$$\left.\begin{aligned} P_n z &= D_n, \\ P_{n-1} &= D_{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ P_0 z &= D_0. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Ces équations nous indiqueront souvent les transcendantes qui doivent entrer dans l'expression des *racines différentielles* de l'équation proposée. On formera des expressions renfermant ces transcendantes et on tâchera de vérifier la proposée en disposant des indéterminées que cette expression doit renfermer.

X.

L'équation qui détermine z peut s'écrire comme suit:

$$\frac{dz}{z} = - \frac{P_{n-1} + \frac{dP_n}{dx}}{P_n} dx ; \tag{114}$$

si les coefficients de la proposée sont des polynomes algébriques, rationnels et entiers et si le degré de

$$P_{n-1} + \frac{dP_n}{dx}, \tag{115}$$

est plus grand que celui de P_n, en divisant le premier par le second, on aura une partie entière et une fonction, que je mettrai sous la forme

$$- \frac{P_{n-1} + \frac{dP_n}{dx}}{P_n} = E(x) + \frac{F(x)}{P_n}, \tag{116}$$

$E(x)$ désignant le polynome entier qui provient de la division des polynomes précédents, et $F(x)$ étant un nouveau polynome dont le degré est plus petit que celui de P_n.

Supposons que l'on ait

$$P_n = f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \cdots\cdots (x-l)^\lambda : \tag{117}$$

et faisons

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)}, \cdots\cdots \tilde{\omega}(x) = (x-l)^\lambda \frac{F(x)}{f(x)}; \tag{118}$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\varphi'(a)}{1\cdot(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi''(a)}{1\cdot 2\,(x-a)^{\alpha-2}} + \cdots + \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1\cdot 2\cdots(\alpha-1)\,(x-a)} \\ & + \frac{\psi(b)}{(x-b)^{\beta}} + \frac{\psi'(b)}{1\cdot(x-b)^{\beta-1}} + \frac{\psi''(b)}{1\cdot 2\,(x-b)^{\beta-2}} + \cdots + \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1\cdot 2\cdots(\beta-1)\,(x-b)} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\tilde{\omega}(l)}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{\tilde{\omega}'(l)}{1\cdot(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{\tilde{\omega}''(l)}{1\cdot 2\,(x-l)^{\lambda-2}} + \cdots + \frac{\tilde{\omega}^{\lambda-1}(l)}{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)\,(x-l)}\end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Substituant cette valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$, ou $\frac{F(x)}{P_n}$ dans l'équation qui détermine z et faisant

$$\int E(x)\,dx = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots\cdots + p_1 x + p_0, \quad (120)$$

on trouve

$$z = e^{p_m x^m + \cdots + p_1 x + p_0 + \chi_{\varphi}(x-a) + \chi_{\psi}(x-b) + \cdots + \chi_{\tilde{\omega}}(x-l)}\,\chi(x, a, b, c, \cdots l), \quad (121)$$

si l'on détermine les fonctions

$$\chi, \quad \chi_{\varphi}, \quad \chi_{\psi}, \cdots\cdots\cdots \chi_{\tilde{\omega}}, \quad (122)$$

par les équations

$$\left.\begin{aligned} -\chi_{\varphi}(x-a) &= \frac{\varphi(a)}{\alpha-1}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi'(a)}{(\alpha-2)\,1\cdot 2}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-2}} + \cdots\cdots + \frac{\varphi^{\alpha-2}(a)}{1\cdot 2\cdots(\alpha-2)}\frac{1}{x-a} \\ -\chi_{\psi}(x-b) &= \frac{\psi(b)}{\beta-1}\frac{1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{\psi'(b)}{(\beta-2)\,1\cdot 2}\frac{1}{(x-b)^{\beta-2}} + \cdots\cdots + \frac{\psi^{\beta-2}(b)}{1\cdot 2\cdots(\beta-2)}\frac{1}{x-b} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\chi_{\tilde{\omega}}(x-l) &= \frac{\tilde{\omega}(l)}{\lambda-1}\frac{1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{\tilde{\omega}'(l)}{(\lambda-2)\,1\cdot 2}\frac{1}{(x-l)^{\lambda-2}} + \cdots\cdots + \frac{\omega^{\lambda-2}(l)}{1\cdot 2\cdots(\lambda-2)}\frac{1}{x-l} \\ \chi(x, a, b\cdots l) &= (x-a)^{\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1\cdot 2\cdots(\alpha-1)}}(x-l)^{\frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1\cdot 2\cdots(\beta-1)}}\cdots\cdots(x-l)^{\frac{\tilde{\omega}^{\lambda-1}(l)}{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}}.\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Multipliant l'équation (109) par le facteur z ainsi déterminé, on voit que les seconds membres des équations (113) seront composés de fonctions algébriques multipliées par les exponentielles et par des radicaux qui entrent seulement comme facteurs de tous ces seconds membres. On voit aussi que pour que toutes les intégrales de l'équation (109) soient des quantités algébriques il faut que le facteur z le soit lui-même.

Pour cela, non-seulement $E(x)$ doit se réduire à zéro, mais il faut encore que le degré du polynome

$$P_{n-1} + \frac{dP_n}{dx} \quad (124)$$

soit plus petit que celui du polynome P_n: il faut encore que P_n ayant la forme

$$P_n = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots\cdots(x-l)^{\lambda}, \quad (125)$$

on ait

$$-P_{n-1} - \frac{dP_n}{dx} = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\cdots\cdots(x-l)^{\lambda-1}F_1(x), \quad (126)$$

$F_1(x)$ étant un polynome dont le degré est inferieur à celui de

$$(x-a)(x-b)\cdots\cdots(x-l). \quad (127)$$

XI.

Le théorème que nous avons donné est encore utile dans la comparaison des fonctions transcendantes.

Soit l'équation

$$(c^2+u^2)\,u\frac{d^2y}{du^2} - [(n+2p-1)(u^2+c^2) + 2(p+q)u]\frac{dy}{du} + 2p(n+2p+2q)uy = 0. \quad (128)$$

Préparons-la, en multipliant le premier membre par le facteur z déterminé par l'équation

$$\frac{d\cdot z(u^2+c^2)u}{du} = [(n+2p-1)(c^2+u^2) + 2(p+q)u^2]z. \quad (129)$$

Faisant, pour abréger,

$$Q = (n+2p-2)c^2, \qquad P = n+4p+2q-4, \quad (130)$$

on en déduit

$$\frac{dz}{z} = \frac{Q}{c^2}\frac{du}{u} + \left(P - \frac{Q}{c^2}\right)\frac{u\,du}{u^2+c^2}; \quad (131)$$

intégrant et faisant disparaître les logarithmes, on trouve

$$z = u^{n+2p-2}(u^2+c^2)^{\frac{2}{2p+2q-2}}. \quad (132)$$

L'équation proposée deviendra

$$\left.\begin{aligned}(u^2+c^2)^{p+q}u^{n+2p-1}\frac{d^2y}{du^2} - [(n+2p-1)(u^2+c^2)+2(p+q)u^2]u^{n+2p-2}(u^2+c^2)^{p+q-1}\frac{dy}{du}\\ + 2p(n+2p+2q)u^{n+2p-1}(u^2+c^2)^{p+q-1}y = 0.\end{aligned}\right\} (133)$$

La comparant avec *l'équation-type* du second ordre

$$(y_1y_2' - y_2y_1')\frac{d^2y}{du^2} - (y_1y_2'' - y_2y_1'')\frac{dy}{dx} + (y_1'y_2'' - y_2'y_1'')y = 0, \quad (134)$$

on aura

$$y_1\frac{d^2y}{du} - y_2\frac{dy_1}{du} = C(u^2+c^2)^{p+q}u^{n+2p-1}, \quad (135)$$

$$\frac{d^2y_2}{du^2} - y_2\frac{d^2y_1}{du^2} = -C(u^2+c^2)^{p+q-1}u^{n+2p-2}[(u^2+c^2)(n+2p-1)+2(p+q)u^2], \quad (136)$$

$$\frac{dy_1}{du}\frac{d^2y_2}{du^2} - \frac{dy_2}{du}\frac{d^2y_1}{du^2} = 2Cp(n+2p+2q)u^{n+2p-1}(u^2+c^2)^{p+q-1}. \quad (137)$$

les constantes n, p et q satisfont aux inégalités

$$n > 0, \quad q+1 > 0, \quad p-1 < 0, \quad -2p > 2q+n. \quad (138)$$

Les deux intégrales définies

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= \int_0^c x^{n-1}(u^2+c^2)^p(c^2-x^2)^q\,dx,\\ y_2 &= \int_0^\infty x^{n-1}(u^2+c^2)^p(c^2-x^2)^q\,dx,\end{aligned}\right\} \quad (139)$$

vérifient l'équation (134); en les substituant dans l'équation (135), on aura

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^c x^{n-1}(u^2+x^2)^p(c^2+x^2)^q\,dx\cdot\int_0^\infty x^{n-1}(u^2+x^2)^{p-1}(c^2-x^2)^q\,dx\\ &-\int_0^c x^{n-1}(u^2+x^2)^{p-1}(c^2+x^2)^q\,dx\cdot\int_0^\infty x^{n-1}(u^2+x^2)^p(c^2-x^2)^q\,dx\\ &=\frac{C}{2p}(u^2+c^2)^{p+q}u^{n+2p-2}.\end{aligned}\right\}\qquad(140)$$

Supposant $u=c$, on aura l'équation suivante pour déterminer la constante arbitraire C

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^c x^{n-1}(c^2+x^2)^p(c^2-x^2)^q\,dx\cdot\int_0^\infty x^{n-1}(c^2+x^2)^{p-1}(c^2-x^2)^q\,dx\\ &-\int_0^c x^{n-1}(c^2+x^2)^{p-1}(c^2-x^2)^q\,dx\cdot\int_0^\infty x^{n-1}(c^2+x^2)^p(c^2-x^2)^q\,dx\\ &=\frac{C}{2p}(2c^2)^{p+q}c^{n+2p-2}.\end{aligned}\right\}\qquad(141)$$

Nous avons ainsi un rapport entre huit intégrales définies qui sert à les comparer les unes avec les autres.

XII.

Considérons dans la formule précédente un cas particulier digne d'attention. Supposons

$$n=1,\qquad p=-\frac{1}{2},\qquad q=-\frac{1}{2};\qquad(142)$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^c\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}\\ &-\int_0^c\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}=\\ &\left[\int_0^c\frac{dx}{\sqrt{c^4-x^4}}\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{(c^2+x^2)\sqrt{c^4-x^4}}\right.\\ &\left.-\int_0^c\frac{dx}{(c^2+x^2)\sqrt{c^4-x^4}}\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{c^4-x^4}}\right]\frac{2c^2}{u^2(u^2+c^2)}.\end{aligned}\right\}\qquad(143)$$

Soit

$$x^2=\frac{c^2u^2\sin^2\varphi}{u^2+c^2\sin^2\varphi};\qquad(144)$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}, \\ \frac{1}{u^2+x^2} &= \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{u^2}, \\ \frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} &+ \frac{1}{u^2\sqrt{u^2+c^2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

en supposant

$$k^2 = \frac{c^2}{u^2+c^2}: \quad (146)$$

or, lorsque $x=0$, on a $\varphi=0$ et lorsque $x=c$, on a aussi $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, donc

$$\left.\begin{aligned} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}}F^1(k), \\ \int_0^c \frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} &= \frac{1}{u^2\sqrt{u^2+c^2}}E^1(k), \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

$F^1(k)$, $E^1(k)$ étant les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèces

$$\left.\begin{aligned} F^1(k) &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\ E^1(k) &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \end{aligned}\right\}. \quad (148)$$

Les intégrales

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}, \\ &\int_0^{\infty}\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}, \end{aligned}\right\} \quad (149)$$

peuvent être décomposées de cette manière

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} &= \int_0^{c}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)(x^2-c^2)}}, \\ \int_0^{\infty}\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} &= \int_0^{c}\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(x^2-c^2)}}. \end{aligned}\right\} \quad (150)$$

Occupons-nous maintenant des intégrales

$$\left.\begin{aligned}&\int_c^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)\,(x^2-c^2)}},\\&\int_c^{\infty}\frac{dx}{(u^2+x^2)\,\sqrt{(u^2+x^2)\,(x^2-c^2)}}.\end{aligned}\right\}\tag{151}$$

Soit

$$x=\frac{c}{\cos\varphi};\tag{152}$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)\,(x^2-c^2)}}=\frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},\\&\frac{1}{u^2+x^2}=\frac{1}{u^2}-\frac{c^2}{u^2\,(u^2+c^2)}\frac{1}{1-k'^2\sin^2\varphi},\\&\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)(x^2-c^2)}}=\frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}}\left[\frac{1}{u^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}-\frac{c^2}{u^2(c^2+u^2)}\frac{d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\right],\end{aligned}\right\}\tag{153}$$

en posant

$$k'^2=\frac{u^2}{u^2+c^2}.\tag{154}$$

Mais $\varphi=0$, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ lorsque x est respectivement égal à c et ∞: donc

$$\left.\begin{aligned}&\int_c^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)\,(x^2-c^2)}}=\frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}}F^1(k'),\\&\int_c^{\infty}\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)\,(x^2-c^2)}}=\frac{1}{u^2\sqrt{u^2+c^2}}F^1(k')-\frac{c^2}{u^2\,(c^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}\Pi^1(-k'^2,k'),\end{aligned}\right\}\tag{155}$$

Π^1 étant la fonction elliptique complète de troisième espèce, dont le module est égal à k' et le paramètre à $-k'^2$

$$\Pi^1(-k'^2,k')=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.\tag{156}$$

Or

$$\Pi^1(-k'^2,k')=\frac{1}{1-k'^2}E^1(k'),\tag{157}$$

(Voyez: Legendre, Exercices de Calcul intégral, t. 1, p. 70): donc

$$\int_c^{\infty}\frac{dx}{(u^2+x^2)\sqrt{(u^2+x^2)\,(x^2-c^2)}}=\frac{1}{u^2\sqrt{u^2+c^2}}[F^1(k')-E^1(k')].\tag{158}$$

Enfin

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(u^2+x^2)\,(c^2-x^2)}}=\frac{1}{u^2\sqrt{u^2+c^2}}[F^1(k)-\sqrt{-1}\,F^1(k')],\tag{159}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+u^2)\sqrt{(u^2+x^2)\,(c^2-x^2)}}=\frac{1}{u^2\sqrt{u^2+c^2}}[E^1(k)-\sqrt{-1}\,[F^1(k')-E^1(k')]\tag{160}$$

Pour calculer les intégrales qui entrent dans le premier membre de l'équation (143), il suffit de faire $u = c$ dans les intégrales précédemment données; on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{c^4 - x^4}} = \frac{1}{c\sqrt{2}} F^1\left(\frac{1}{2}\right),\\
&\int_0^c \frac{dx}{(c^2 + x^2)\sqrt{c^4 - x^2}} = \frac{1}{c^3\sqrt{2}} E^1\left(\frac{1}{2}\right),\\
&\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{c^4 - x^4}} = \frac{1}{c\sqrt{2}}\left[F^1\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{-1}\, F^1\left(\frac{1}{2}\right)\right],\\
&\int_0^\infty \frac{dx}{(c^2 + x^2)\sqrt{c^4 - x^4}} = \frac{1}{c^3\sqrt{2}}\left[E^1\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{-1}\left(F^1\left(\frac{1}{2}\right) - E^1\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (161)$$

Substituant toutes les intégrales précédentes dans l'équation (143), on trouvera

$$F^1(k)\, E^1(k') + F^1(k')\, E^1(k) - F^1(k)\, F^1(k') = F^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\left[2\, E^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) - F^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right]. \quad (162)$$

On voit que le premier membre de la formule précédente, fonction des modules complémentaires k et k' (puisque $k^2 + k'^2 = 1$), est égal à une constante, dont on détermine la valeur facilement en supposant k' infiniment petit: on a

$$F^1(k') = \frac{1}{2}\pi, \qquad E^1(k') = \frac{1}{2}\pi, \qquad F^1(k) = \infty. \quad (163)$$

Substituant ces valeurs dans la formule (161), et supprimant les deux termes infinis qui se détruisent mutuellement, on trouve $\frac{1}{2}\pi$; donc

$$F^1(k)\, E^1(k') + E^1(k)\, F^1(k') - F^1(k)\, F^1(k) = \frac{\pi}{2}, \quad (164)$$

$$F^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2\, E^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{2}. \quad (165)$$

XIII.

La formule (164) a été pour la première fois démontrée par Legendre (Voyez: Exercices de Calcul Intégral, t. 1, p. 61), et puis par d'autres géomètres de plusieurs manières différentes (Voyez: Poisson, Journal de l'Ecole Polyt., 20ième cahier, p. 229; Abel, Oeuvres complètes, t. 1, p. 98). La formule (165) se déduit immédiatement de l'autre, en supposant les modules égaux.

On peut encore démontrer plus simplement le théorème (164). Considérons l'équation

$$(1 - k^2)\frac{d^2y}{dk^2} + \frac{1 - 3k^2}{k}\frac{dy}{dk} - y = 0; \quad (166)$$

qui a pour intégrales particulières, comme on le sait, $F^1(k)$ et $F^1(k')$. Déterminant z par l'équation

$$\frac{d \cdot z(1-k^2)}{dk} = -\frac{1-3k^2}{k} z, \tag{167}$$

on trouve

$$\frac{1}{k(1-k^2)} \frac{d^2y}{dk^2} + \frac{1-3k^2}{k^2(1-k^2)^2} \frac{dy}{dk} - \frac{1}{k(1-k^2)^2} y = 0, \tag{168}$$

pour représenter l'équation (165) *préparée*. Donc

$$y_1 \frac{dy_2}{dk} - y_2 \frac{dy_1}{dk} = \frac{C}{k(1-k^2)}, \tag{169}$$

$$\frac{dy_1}{dk} \frac{d^2y_2}{dk^2} - \frac{dy_2}{dk} \frac{d^2y_1}{dk^2} = C \frac{3k^2-1}{k^3(1-k^2)^2}. \tag{170}$$

Posant $y_1 = F^1(k), \quad y_2 = F^1(k');$

et différentiant,

$$\frac{dy_1}{dk} = \frac{1}{k^2 k}[E^1(k) - k^2 F^1(k)], \qquad \frac{dy_2}{dk} = -\frac{1}{k^2 k}[E^1(k') - k^2 F^1(k')]; \tag{171}$$

substituant y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dk}$, $\frac{dy_2}{dk}$ dans la formule (168), on trouve immédiatement

$$F^1(k) E^1(k') + F^1(k') E^1(k) - F^1(k) F^1(k') = -C. \tag{172}$$

La constante se détermine comme précédemment.

Si nous nous étions servi de l'équation (170) au lieu de l'équation (169), on serait arrivé exactement aux mêmes résultats.

XIV.

On satisfait à l'équation

$$-\frac{u}{m}\frac{d^2y}{du^2} + \left(cu - \frac{n+p+2}{m}\right)\frac{dy}{du} + (n+1)cy = e^{mau} a^{n+1} (c-a)^{p+1}, \tag{173}$$

en prenant

$$y = \int_0^a e^{mux} x^n (c-x)^p \, dx; \tag{174}$$

par conséquent si $a = c$ et $p+1 > 0$, l'équation (173) se réduisant à

$$u\frac{d^2y}{du^2} - (mcu - n - p - 2)\frac{dy}{du} - (n+1)mcy = 0, \tag{175}$$

aura pour intégrale

$$y_1 = \int_0^c e^{mux} x^n (c-x)^p \, dx. \tag{176}$$

Echangeant dans cette équation c en m et m en c, elle reste invariable: il en résulte que

$$y_2 = \int_0^m e^{cux} x^n (m-x)^p \tag{177}$$

est une autre intégrale de la même équation

L'équation (173) *préparée* devient

$$\frac{e^{mcu}}{u^{n+p+2}}\frac{d^2y}{du^2} - \frac{(mcu-n-p-2)\,e^{mcu}}{u^{n+p+3}}\frac{dy}{dx} - (n+1)\,mc\,\frac{e^{mcu}}{u^{n+p+3}}y = 0: \quad (178)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} y_1\,y_2' - y_2\,y_1' &= C\,\frac{u^{mcu}}{u^{n+p+2}},\\ y_1\,y_2'' - y_2\,y_1'' &= C\,\frac{(mcu-n-p-2)}{u^{n+p+3}}\,e^{mcu},\\ y_1'\,y_2'' - y_2'\,y_1'' &= -\,C\,\frac{(n+1)\,mc\,e^{mcu}}{u^{n+p+3}}. \end{aligned}\right\} \quad (179)$$

Mettant dans la première équation les valeurs de y_1 et y_2, et déterminant la constante en faisant $u=0$, on aura, si l'on suppose $n+p+2>0$,

$$\left.\begin{aligned} &c\int_0^c e^{mcx}\,x^n\,(c-x)^p\,dx\cdot\int_0^m e^{cux}\,x^{n+1}\,(m-x)^p\,dx\\ &-\,m\int_0^m e^{cux}\,x^n\,(m-x)^p\,dx\cdot\int_0^c e^{mux}\,x^{n+1}\,(c-x)^p\,dx = 0. \end{aligned}\right\} \quad (180)$$

La troisième équation (179) conduit au même résultat. La 2ième donne

$$\left.\begin{aligned} &c^2\int_0^c e^{mux}\,x^n\,(c-x)^p\,dx\cdot\int_0^m e^{cux}\,x^{n+2}\,(m-x)^p\,dx\\ &-\,m^2\int_0^m e^{cux}\,x^n\,(m-x)^p\,dx\cdot\int_0^c e^{mux}\,x^{n+2}\,(c-x)^p\,dx = 0. \end{aligned}\right\} \quad (181)$$

Les deux équations que nous venons d'écrire peuvent être facilement vérifiées, si l'on remplace x par cx dans les intégrales dont les limites sont 0 et c, et x par mx dans celles dont les limites sont 0 et m.

XV.

Soit

$$(a+bx)\,y + (a'+b'x)\,\frac{dy}{dx} + (a''+b''x)\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad (182)$$

faisant

$$y = \int e^{-ux}\,v\,du, \quad (183)$$

on aura

$$\int v\,(a-a'u+a''u^2)\,e^{-ux}\,du - \int v\,(b-b'u+b''u^2)\,\frac{d\cdot e^{-ux}}{du}\,du = 0: \quad (184)$$

$$v\,(a-a'u+a''u^2) + \frac{d\cdot v\,(b-b'u+b''u^2)}{du} = 0, \quad (185)$$

pour déterminer v, et

$$e^{-ux}\,v\,(b-b'u+b''u^2) = 0, \quad (186)$$

pour déterminer les limites de l'intégrale.

De l'équation (185) on tire

$$\frac{dv}{v} = -\,a''\,du - \frac{(-a'+2+a''b')\,u + (a-b'-a''b)}{b-b'u+b''u^2}\,du; \tag{187}$$

posant

$$\left.\begin{aligned} &b - b'u + b''u^2 = (u-\alpha)(u-\beta),\\ &f(u) = (-a'+a''b'+2)\,u + (a-b'-a''b),\\ &F(u) = b''u^2 - b'u + b, \qquad b'' = 1, \end{aligned}\right\} \tag{188}$$

on trouve

$$\frac{dv}{v} = -\,a''\,du - \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{du}{u-\alpha} - \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{du}{u-\beta}; \tag{189}$$

et en intégrant

$$lv = -\,a''u - \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\,l\,(u-\alpha) - \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\,l\,(u-\beta), \tag{190}$$

ou

$$v = \frac{1}{e^{a''u}\,(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}. \tag{191}$$

L'équation (184) se réduit à celle-ci

$$\frac{e^{-(x+a'')u}}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}-1}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}-1}} = 0, \tag{192}$$

laquelle, en supposant que l'on ait

$$x + a'' > 0, \qquad -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} + 1 > 0, \qquad -\frac{f(\beta)}{F'(\beta)} + 1 > 0, \tag{193}$$

peut être vérifiée en donnant à u chacune des trois valeurs α, β, ∞.

Les intégrales de l'équation (182) peuvent donc être mises sous les formes

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-(u''+x)u}\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}},\\ y_2 &= \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-(u''+x)u}\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}. \end{aligned}\right\} \tag{194}$$

L'équation (182) *préparée* devient

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{e^{b'x}\,(x+a'')^{a'-a''b'}}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(a'+b'x)}{e^{b'x}\,(x+a'')^{a'+1-a''b'}}\frac{dy}{dx}\\ + \frac{a+bx}{e^{b'x}\,(x+a'')^{a'+1-a''b'}}\,y = 0; \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

donc

$$y_1\,y_2' - y_2\,y_1' = \frac{C}{e^{b'x}\,(x+a'')^{a'-a''b'}}; \tag{196}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\cdot\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,u\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\\&-\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\cdot\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,u\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}=\frac{C}{e^{b'x}(x+a'')^{a'-a''b'}}.\end{aligned}\right\}\quad(197)$$

Pour déterminer la constante, faisons $x+a''=1$; on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-u}\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\cdot\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-u}\,u\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\\&-\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-u}\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\cdot\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-u}\,u\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}=\frac{C}{e^{(1-a'')b'}}.\end{aligned}\right\}\quad(198)$$

Les quatre intégrales (198) peuvent être réduites à deux qui ne diffèrent l'une de l'autre que par leurs limites; l'une étant prise entre les limites 0 et 1, l'autre entre les limites 1 et l'infini.

Nous disons que les quatre intégrales se réduisent à deux, parceque deux étant connues, les valeurs des autres s'en déduisent par la différentiation.

L'équation

$$y_1'y_2''-y_2'y_1''=C\frac{a+bx}{e^{b'x}(x+a'')^{a'+1-a''b'}}\quad(199)$$

donne

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,u\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\cdot\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')x}\,u^2\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\\&-\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,u\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\cdot\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-(x+a'')u}\,u^2\,du}{(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}}\\&\qquad=C\frac{a+bx}{e^{b'x}(x+a'')^{a'+1-a''b'}};\end{aligned}\right\}\quad(200)$$

C est la même constante qui entre dans l'équation (197).

On peut, si l'on veut, éliminer cette constante entre les équations (197) et (200) et arriver à de nouvelles relations entre y_1, y_2 et leurs différentielles qui donnent les unes aux moyens des autres.

XVI.

D'après ce que l'on a vu dans les pages antérieures, on peut trouver des relations entre les intégrales définies qui vérifient les équations différentielles des ordres supérieurs au second.

Soit, l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$\left.\begin{aligned}
&[(y_2y_3' - y_3y_2')\,y_1'' - (y_1y_3' - y_3y_1')\,y_2'' + (y_1y_2' - y_2y_1')\,y_3'']\,\frac{d^3y}{dx^3}\\
&- [(y_2y_3' - y_3y_2')\,y_1''' - (y_1y_3' - y_3y_1')\,y_2''' + (y_1y_2' - y_2y_1')\,y_3''']\,\frac{d^2y}{dx^2}\\
&+ [(y_2y_3'' - y_3y_2'')\,y_1''' - (y_1y_3'' - y_3y_1'')\,y_2''' + (y_1y_2'' - y_2y_1'')\,y_2''']\,\frac{dy}{dx}\\
&- [(y_2'y_3'' - y_3'y_2'')\,y_1''' - (y_1'y_3'' - y_3'y_1'')\,y_2''' + (y_1'y_2'' - y_2'y_1'')\,y_3''']\,y.
\end{aligned}\right\} \quad (201)$$

Considérons en particulier l'équation

$$(a + bx)\,y + (a' + b'x)\,\frac{dy}{dx} + (a'' + b''x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + (a''' + b'''x)\,\frac{d^3y}{dx^3} = 0; \quad (202)$$

en y faisant

$$y = \int e^{-ux}\,v\,du, \quad (203)$$

on trouve

$$\int v\,(a - a'u + a''u^2 - a'''u^3)\,e^{-ux}\,du - \int v\,(b - b'u + b''u^2 - b'''u^3)\,\frac{d\cdot e^{-ux}}{du}\,du = 0; \quad (204)$$

d'où l'on tire

$$v\,(a - a'u^2 + a''u^2 - a'''u^3) + \frac{d\cdot v\,(b - b'u + b''u^2 - b'''u^3)}{du} = 0, \quad (205)$$

pour déterminer v, et

$$e^{-ux}\,v\,(b - b'u + b''u^2 - b'''u^3) = 0, \quad (206)$$

pour déterminer les limites de l'intégrale (203). De l'équation (205) on tire

$$\frac{dv}{v} = -a'''\,du + \frac{(a'' - 3b''' - b''a''')\,u^2 + (-a' + 2b'' + b'a'')\,u + a - b' - a'''b}{u^3 - b''u^2 + b'u - b}; \quad (207)$$

si l'on fait

$$\left.\begin{aligned}
&f(u) = (a'' - 3b''' - b''a''')\,u^2 + (-a' + 2b'' + b'a'')\,u + a - b' - a'''b,\\
&F(u) = u^3 - b''u^2 + b'u - b, \qquad b'' = 1,\\
&u^3 - b''u^2 + b'u - b = (u - \alpha)\,(u - \beta)\,(u - \gamma),
\end{aligned}\right\} \quad (208)$$

on trouve

$$\frac{dv}{v} = -a'''\,du + \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\,\frac{du}{u - \alpha} + \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\,\frac{du}{u - \beta} + \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\,\frac{du}{u - \gamma}; \quad (209)$$

et en intégrant

$$v = e^{-a'''u}\,(u - \alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u - \beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\,(u - \gamma)^{\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}}. \quad (210)$$

L'équation (207) se vérifie si l'on prend pour u chacune des valeurs $u = \infty$, $u = \alpha$, $u = \beta$, $u = \gamma$; pourvu que l'on ait

$$x + a''' > 0, \qquad \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} + 1 > 0, \qquad \frac{f(\beta)}{F'(\beta)} + 1 > 0, \qquad \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)} + 1 > 0, \quad (211)$$

les intégrales de la proposée sont donc

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_\alpha^\infty e^{-(a'''+x)u}\,(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\,(u-\gamma)^{\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}}\,du,\\ y_2 &= \int_\beta^\infty e^{-(a'''+x)u}\,(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\,(u-\gamma)^{\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}}\,du,\\ y_3 &= \int_\gamma^\infty e^{-(a'''+x)u}\,(u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}}\,(u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\,(u-\gamma)^{\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}}\,du. \end{aligned}\right\} \quad (212)$$

L'équation (202) *préparée* devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{e^{b''x}\,(x+a''')^{a''+1-a'''b''}}\,\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{b''x+a''}{e^{b''x}\,(x+a''')^{a''+1-a'''b''}}\,\frac{d^2y}{dx^2}\\ &+\frac{b'x+a'}{e^{b''x}\,(x+a''')^{a''+1-b'''b'}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{bx+a}{e^{b''x}\,(x+a''')^{a''+1-a'''b''}}\,y \end{aligned}\right\} = 0: \quad (213)$$

en la rapprochant de la formule (204), on en déduit

$$(y_2y_3'-y_3y_2')\,y_1'' - (y_1y_3'-y_3y_1')\,y_2'' + (y_1y_2'-y_2y_1')\,y_3'' = \frac{C}{e^{b''x}\,(x+a''')^{a''-a'''b''}}; \quad (214)$$

mettant dans cette équation les valeurs précédentes de y_1, y_2, y_3 ainsi que de leurs dérivées, et déterminant après la constante en donnant une valeur particulière à x, on aura entre les intégrales définies que ces fonctions représentent une certaine relation qui servira à les comparer et que je me dispenserai d'écrire. On peut encore trouver trois équations de la forme (214).

XVII.

Quelques géomètres avaient déjà remarqué qu'en désignant par y_1, y_2 les deux intégrales particulières de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\,\frac{dy}{dx} + qy = 0, \quad (215)$$

c'est-à-dire deux fonctions telles que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y_1}{dx^2} + p\,\frac{dy_1}{dx} + qy_1 &= 0,\\ \frac{d^2y_2}{dx^2} + p\,\frac{dy_2}{dx} + qy_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (216)$$

on pouvait former l'équation

$$y_1\,\frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2\,\frac{d^2y_1}{dx^2} + p\left(y_1\,\frac{dy_2}{dx} - y_2\,\frac{dy_1}{dx}\right) = 0, \quad (217)$$

d'où on déduit, par l'intégration,

$$y_1\,\frac{dy_2}{dx} - y_2\,\frac{dy_1}{dx} = C\,e^{-\int p\,dx}. \quad (218)$$

Cette remarque (ou le théorème que nous venons d'écrire) a été faite à la fois par plusieurs géomètres. POISSON, ABEL, JACOBI (Fundamenta novae theoriae etc.) en font usage. Notre théorie donne non seulement le théorème (218), mais plusieurs autres, soit pour les équations du second ordre, soit pour celles des ordres supérieurs.

XVIII.

Des théorèmes analogues aux précédents ont lieu entre les intégrales finies ou les *racines-différences* des équations aux différences finies.

Considérons l'équation

$$(a + bx)\,y_x + (a' + b'x)\,y_{x+1} + (a'' + b''x)\,y_{x+2} = 0; \tag{219}$$

si l'on fait

$$y_x = \int u^x v\,du, \tag{220}$$

on trouve

$$\int (a + a'u + a''u^2)\,u^x v\,du + \int (b + b'u + b''u^2)\,u v \frac{d \cdot u^x}{du}\,du = 0; \tag{221}$$

d'où on en déduit

$$(a + a'u + a''u^2)\,v \frac{d \cdot v\,(b + b'u + b''u^2)\,u}{du} = 0, \tag{222}$$

pour déterminer v, et

$$u^{x+1} v\,(b + b'u + b''u^2) = 0, \tag{223}$$

pour déterminer les limites de l'intégrale (220).

L'équation (222) pouvant s'écrire comme suit

$$\frac{dv}{v} = \frac{a - b + (a' - 2b')u + (a'' - 3b'')u^2}{(b + b'u + b''u^2)\,u}\,du, \tag{224}$$

ou bien

$$\frac{dv}{v} = \frac{f(0)}{F'(0)}\frac{du}{u} + \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{du}{u - \alpha} + \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{du}{u - \beta}, \tag{225}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} f(u) &= a - b + (a' - 2b')u + (a'' - 3b'')u^2, \\ F(u) &= b + b'u + b''u^2, \\ b + b'u + b''u^2 &= (u - \alpha)(u - \beta); \quad b'' = 1, \end{aligned}\right\} \tag{226}$$

l'intégration donne

$$v = u^{\frac{f(0)}{F'(0)}} (u - \alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u - \beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}. \tag{227}$$

Mettant cette valeur de v dans l'équation (223), on voit qu'on peut la satisfaire en donnant à u chacune des valeurs 0, α, β pourra que l'on ait

$$x + \frac{f(0)}{F'(0)} + 1 > 0, \qquad \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} + 1 > 0, \qquad \frac{f(\beta)}{F'(\beta)} + 1 > 0; \tag{228}$$

et les intégrales

$$y_x^{(1)} = \int_0^{\alpha} u^{x+\frac{f(u)}{F(u)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}} du.$$
$$y_x^{(2)} = \int_0^{\beta} u^{x+\frac{f(u)}{F(u)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}} du. \quad (229)$$

satisferont à l'équation (219).

Si les inégalités précédentes n'ont pas lieu, il faudra changer les limites des intégrales.

Pour préparer l'équation (219) on doit déterminer z_x par l'équation

$$[a'' + b''(x+1)] z_{x+1} = -(a' + b'x) z_x. \quad (230)$$

L'intégration donne

$$z_x = C(-1)^x [P_{x-1}]^x. \quad (231)$$

si l'on désigne par P_x le quotient

$$\frac{a' + b'x}{a'' + b''(x+1)} \quad (232)$$

et par

$$[P_{x-1}]^x. \quad (233)$$

la *factorielle* de P_{x-1}, d'après la dénomination d'Arbogast, et la notation de Vandermonde, équivalente au produit

$$P_{x-1} \cdot P_{x-2} \cdot P_{x-3} \cdot \ldots \cdot P_1 \cdot P_0 \quad (234)$$

L'équation (219) *préparée* deviendra donc

$$C(-1)^x (a'' + b''x) [P_{x-1}]^x y_{x+2} + C(-1)^x (a' + b'x) [P_{x-2}]^x y_{x+1} + C(-1)^x (a + bx) [P_{x-3}]^x y_x = 0. \quad (235)$$

En la comparant à *l'équation-type* du même ordre, savoir

$$\left(y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)}\right) y_{x+1} - \left(y_x^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+2}^{(1)}\right) y_{x+1} + \left(y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+2}^{(1)}\right) y_x = 0. \quad (236)$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} y_x^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+2}^{(1)} &= C(-1)^x (a'' + b''x) [P_{x-2}]^x. \\ y_x^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+2}^{(1)} &= C(-1)^{x+1} (a' + b'x) [P_{x-1}]^x. \\ y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+1}^{(2)} y_{x+2}^{(1)} &= C(-1)^x (a + bx) [P_{x-1}]^x. \end{aligned}\right\} \quad (237)$$

Mettant dans la première de ces équations à la place de $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$ leurs valeurs déterminées par les égalités (229), on trouvera

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\alpha} u^{x+\frac{f(u)}{F(u)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}} du \cdot \int_0^{\beta} u^{x+1+\frac{f(u)}{F(u)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}} du \\ &- \int_0^{\alpha} u^{x+1+\frac{f(u)}{F(u)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}} du \cdot \int_0^{\beta} u^{x+\frac{f(u)}{F(u)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}} du \\ &= C(-1)^x (a'' + b''x)^{-1}. \end{aligned}\right\} \quad (238)$$

Pour déterminer la constante nous pouvons faire $x = 0$, et en observant que, d'après les propriétés connues des factorielles, on a

$$[p_x]^0 = 1, \tag{239}$$

on trouvera pour déterminer C

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\alpha} u^{\frac{f(0)}{F'(0)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\, du \cdot \int_0^{\beta_1} u^{1+\frac{f(0)}{F'(0)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\, du \\ &- \int_0^{\alpha_1} u^{1+\frac{f(0)}{F'(0)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\, du \cdot \int_0^{\beta} u^{\frac{f(0)}{F'(0)}} (u-\alpha)^{\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}} (u-\beta)^{\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}}\, du = C\,a''. \end{aligned}\right\} \tag{240}$$

Mon principal but dans cet article a été de mieux faire voir l'analogie qu'il y a entre les équations différentielles et les équations algébriques ordinaires, en les rapprochant les unes des autres par les mêmes notations et les mêmes dénominations. On verra dans d'autres Mémoires de ce Recueil la grande importance qui résulte de cette analogie qui nous portera à traiter par les mêmes principes l'analyse algébrique et l'analyse différentielle.

Mémoire sur le Son.

Ce mémoire, présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 16 Juillet 1855, est publié d'après le manuscrit conservé aux Archives de l'Institut, manuscrit que M. Ernest Maindron nous a communiqué avec le plus grand empressement. L'original se compose de 41 pages réparties entre 4 cahiers: il débute par une reproduction presque exacte des N^{os} I—III du *Mémoire sur un théorème de Calcul intégral et ses applications à la solution des problèmes de Physique mathématique* (voir ci-dessus p. 95). Réimprimer ici ce début aurait été inutile: en conséquence, il a été nécessaire de changer dans les pages suivantes les numéros des équations, des renvois et des chapitres: nous nous sommes permis aussi quelques corrections de forme, mais aucun changement qui mérite d'être signalé.

I.

Représentons par p, q, r, les vitesses des molécules parallèlement aux axes coordonnés des x, y et z, par φ la fonction déterminée par

$$d\varphi = p\,dx + q\,dy + r\,dz;$$

on aura pour représenter le mouvement des fluides élastiques

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) - \frac{dV}{dx}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dV}{dy}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dV}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\\ - 2\,\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - 2\,\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - 2\,\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}\\ - 2\,\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - 2\,\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} - 2\,\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

comme on le voit, V étant déterminé par l'équation

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, \quad (2)$$

ce qui est permis d'après ce qui existe dans la nature.

Supposant, comme on l'a toujours fait dans la théorie du son, que la vitesse des molécules soit très-petite, la formule précédente réduite à la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) - \frac{dV}{dx}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dV}{dy}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dV}{dz}\frac{d\varphi}{dz} \quad (3)$$

a les mêmes fonctions arbitraires que l'équation (24) de la page 98 composée relativement aux termes du second ordre de la même manière qu'elle; et par conséquent son intégrale, eu égard à la formule (26) de la même page, est de la forme

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(x, y, z, t, \xi, u, v)\ \Phi\ [x + a\,t\cos u\,f(\xi),\ y + a\,t\sin u\sin v\,f(\xi),\\ &\qquad z + a\,t\sin u\cos v\,f(\xi)]\ t\sin v\ du\,dv\,d\xi\\ + \frac{d}{dt}&\int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(x, y, z, t, \xi, u, v)\ \psi\ [x + a\,t\cos u\,f(\xi),\ y + a\,t\sin u\sin v\,f(\xi),\\ &\qquad z + a\,t\sin u\cos v\,f(\xi)]\ t\sin v\ du\,dv\,d\xi\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$F(x, y, z, t, \xi, u, v)$ étant une fonction des variables $x, y, \ldots$, dépendantes des coefficients de l'équation (4) et $f(\xi)$ une autre fonction qui ne dépend aucunement d'eux et qui satisfait en outre aux équations

$$f(a) = 1, \qquad f(b) = 1.$$

Beaucoup d'autres formes peuvent être données à l'intégrale de l'équation (4), mais, d'après notre théorème, la précédente est assez générale, ou, en d'autres termes, si au lieu d'avoir pris une seule fonction $f(\xi)$ à une seule variable, nous avions pris plusieurs fonctions à différentes variables, ainsi que plusieurs intégrations définies, cette formule ne serait pas plus générale que la précédente et les conclusions qu'on en déduirait ne seraient pas différentes.

Changeons les variables en posant

$$x = r\cos\mu,\ y = r\sin\mu\sin\lambda,\ z = r\sin\mu\cos\lambda;$$

supposons, maintenant, que dans une masse gazeuse indéfinie, on ait mis en mouvement une partie renfermée dans une sphère très-petite et dont le rayon est égal à ε. Différentiant la formule précédente par rapport à x, y, z et t, pour en déduire les valeurs de la vitesse et de la condensation, il est bien clair que les fonctions arbitraires, pour satisfaire aux conditions que la vitesse et la condensation sont nulles, quand $t = o$, pour des points qui sont en dehors de la petite sphère dont nous avons parlé tout à l'heure, doivent satisfaire aux équations

$$\left.\begin{aligned} &r\cos\mu + a\,t\,f(\xi)\cos u = \varepsilon\cos\mu,\\ &r\sin\mu\sin\lambda + a\,t\,f(\xi)\sin u\sin r = \varepsilon\sin\mu\sin\lambda,\\ &r\sin\mu\cos\lambda + a\,t\,f(\xi)\sin u\cos v = \varepsilon\sin\mu\cos\lambda.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On en déduit

$$\varepsilon^2 = r^2 + 2\,r\,a\,t\,f(\xi)\,[\cos\mu\cos u + \sin\mu\sin u\cos(v - \lambda)] + a^2\,t^2\,f(\xi)^2,$$

ou en posant, ce qui est toujours permis

$$\cos\mu\cos u + \sin\mu\sin u\cos(v - \lambda) = \cos 2m, \quad (6)$$

on obtient:

$$\varepsilon^2 = [r - a\,t\,f(\xi)]^2 + 4\,r\,a\,t\,f(\xi)\cos^2 m. \quad (7)$$

L'équation (7) montre qu'il n'y a de mouvement que tant que $r - a\,t\,f(\xi)$ reste compris entre les limites $\pm\varepsilon$. Représentant donc par ω une quantité plus petite que ε, il ne peut y avoir de mouvement que si

$$r - a\,t\,f(\xi) = \pm\omega$$

ou, plus simplement, si l'on a

$$r - a\,t = \pm\omega \quad (8)$$

en mettant au lieu de ξ les valeurs que cette variable acquiert dans les intégrations.

L'équation (8) prouve que la vitesse du son est constante et égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité à la densité de l'air; que l'épaisseur de l'onde, dont la forme est sphérique, est constante et égale à 2ε; le temps d'oscillation de chaque molécule est égal à $\frac{2z}{a}$. D'où résulte cette con-

séquence remarquable: étant donnée l'hypothèse du mouvement dans laquelle nous nous plaçons, la propagation ne dépend aucunement des forces accélératrices.

On peut arriver tout de suite à l'égalité (8), en donnant à l'intégrale de l'équation (3) la forme

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(x, y, z, t, \xi, u, v)\,\Phi\,[x + a\,t\cos u\,f(\xi),\ y + a\,t\sin u\sin v\,f(\xi),\\ &\qquad z + a\,t\sin u\cos v)\,f(\xi)]\,t\sin u\,d\xi\,du\,dv\\ + \frac{d}{dt}&\int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(x, y, z, t, \xi, u, v)\,\psi\,[x + a\,t\cos u)\,f(\xi),\ (y + a\,t\sin u\sin v\,f(\xi),\\ &\qquad z + a\,t\sin u\cos v\,f(\xi)]\,t\sin u\,d\xi\,du\,dv;\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

les raisonnements deviennent alors évidents.

II.

Si dans l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + b^2\varphi, \quad (9^{bis})$$

nous remplaçons b par $\frac{y}{2a}\sqrt{-1}$, φ par $e^{\frac{y^2}{2a^2}}\varphi$, elle se transforme dans celle-ci

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + y\frac{d\varphi}{dz} \quad (10)$$

qui donne le mouvement du son dans l'hypothèse que la gravité est constante et égale à y; l'axe des z est vertical et la coordonnée qui lui correspond comptée du haut en bas. Il en résulte que si nous multiplions l'intégrale

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,e^{bt\cos u\sin x\sin\omega}\,\Phi\,x + a\,t\sin u\sin v,\ y + a\,t\sin u\cos v,\\ &\qquad z + a\,t\cos u\cos v)\sin u\sin v\cos du\,dv\,dx\,d\omega\\ + \frac{d}{dt}&\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,e^{bt\cos u\sin x\sin\omega}\,\psi\,x + a\,t\sin u\sin v,\ y + a\,t\sin u\sin v,\\ &\qquad z + a\,t\cos u\cos v)\sin u\sin v\cos v\,du\,dv\,dx\,d\omega\end{aligned}\right\} \quad (10^{bis})$$

par $e^{\frac{y^2}{2a}}$ et que si nous prenons seulement la partie réelle de l'exponentielle qu'elle contient, le résultat sera l'intégrale de l'équation (10). Or, comme de cette formule on déduit facilement l'égalité (8), nous aurons une confirmation du théorème général énoncé plus haut.

III.

Le théorème sur la composition des fonctions arbitraires, montrant qu'elles ne dépendent que des termes de l'ordre n, si l'équation est de l'ordre n, montre à la fois que cette recherche est beaucoup plus simple que celle de l'intégrale générale; et que, si l'équation ne contient que trois variables,

elle dépend seulement d'une quadrature simple et indéfinie, si les coefficients de la proposée ne contiennent qu'une seule variable (ce qui arrive géneralement dans tous les problèmes de Physique mathématique).

Ainsi, prenant l'équation

$$\frac{d^2v}{dt^2} = K\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\,\frac{d\log\rho x}{dx} + v\,\frac{d^2\log\rho x}{dx^2}\right), \tag{11}$$

qui représente (voyez Poisson, Mémoire sur la théorie du son, Journal de l'École Polytechnique, cah. XIV) le mouvement de l'air dans un canal courbe quelconque; x est l'abcisse comptée suivant l'axe lui-même, t le temps, v la vitesse, ρ la largeur variable, mais toujours petite, du canal, et qui est en outre une fonction de x; k une autre fonction de x dépendante de la loi des températures; prenant, dis-je, la formule précédente, ses fonctions arbitraires qui dépendent de la simple quadrature $\int\frac{dk}{\sqrt{K}}$, sont

$$\varphi\left(\int\frac{dx}{\sqrt{K}} + t\right),\quad \psi\left(\int\frac{dx}{\sqrt{K}} - t\right) \tag{12}$$

et, d'après ce que nous avons dit précédemment, l'intégrale de l'équation (11) peut être représentée par

$$v = \int_0^\pi f(x,t,\theta)\,\varphi\left[\left(\int\frac{dx}{\sqrt{K}} + t\right)\cos\theta\right]d\theta + \int_0^\pi F(x,t,\theta)\,\psi\left[\left(\int\frac{dx}{\sqrt{K}} - t\right)\cos\theta\right]d\theta. \tag{13}$$

Supposant, maintenant, que, quand $t = 0$, on ait ébranlé seulement la partie de la ligne d'air comprise entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$, il est évident que, posant $\int\frac{dx}{\sqrt{k}} = \Phi(x)$, et representant par ω une variable positive et moindre que ε, les fonctions arbitraires n'auront pas de valeur, et, par conséquent il n'y aura pas de mouvement tant que l'égalité

$$\Phi(x) \pm t = \Phi(\omega) \tag{14}$$

n'aura pas lieu.

Dans le cas de la nature, K étant égal à $a^2(1 + bux)$ (voyez Poisson, Mémoire sur la théorie du son, Journal de l'École Polytechnique cah. XIV), l'équation précédente se réduit à

$$\sqrt{1 + bux} = \frac{abu}{2}t + \sqrt{1 + bu\omega} \tag{15}$$

mettant de coté

$$\sqrt{1 + bux} = -\frac{abu}{2}t + \sqrt{1 + bu\omega} \tag{16}$$

qui disparaît presque à l'origine du mouvement, à cause de la petitesse de ω, quand x est positif. Quand x est négatif, c'est la seconde qu'on doit conserver. Supposant donc que les variables x, t, et ω soient positives ou négatives à la fois, on aura pour les deux cas

$$x = \omega + at\sqrt{1 + bu\omega} + \frac{a^2bu}{4}t^2 \tag{17}$$

ce qui montre que le son, dans le sens de la gravité, se propage d'un mouvement uniformément accéléré, et, dans le sens opposé, d'un mouvement retardé; la vitesse étant la même que celle d'un corps animé d'une force accélératrice ou retardatrice constante et égale à $\frac{a^2b}{2}$, dirigée verticalement, lequel glisserait par un canal droit, faisant avec la verticale un angle dont le cosinus serait u, la vitesse initiale étant $a\sqrt{1 + bu\varepsilon}$ dans le premier cas et $a\sqrt{1 - bu\varepsilon}$ dans le second.

IV.

L'intégrale (13) ou l'équation (14), montre que la propagation du mouvement ne dépend aucunement de la forme et des dimensions du canal, mais seulement de la loi de variation des températures. Comme ce canal peut avoir une figure quelconque, on peut concevoir ou supposer qu'il soit constamment orthogonal à l'une des trois dimensions, suivant laquelle le mouvement aurait lieu à l'air libre, et supposant K constante et en outre des forces quelconques (ce qui ne changeait pas l'équation relativement aux termes du second ordre) on aurait une nouvelle démonstration du théorème énoncé précédemment relativement à l'influence qu'ont les forces accélératrices sur le mouvement des fluides élastiques.

V.

Considérons maintenant l'air libre et d'après ce qui semble exister dans la nature, supposons que la température décroisse à partir de la surface de la terre proportionellement à la hauteur verticale, en posant pour abréger $\frac{d\varphi}{dz} = \psi$, on aura, pour l'équation qui doit déterminer le mouvement du son (voyez le Mémoire cité de Poisson)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = a^2 (1 + bz) \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2}\right) + (y - a^2 b) \frac{d\psi}{dz} - \frac{(y - a^2 b)}{1 + bz} b\psi. \quad (18)$$

Faisons d'abord $\sqrt{1 + bz} = z_1$, et après

$$\frac{b}{2} \frac{y}{z_1} = y_1, \frac{b}{2} \frac{x}{z_1} = x_1,$$

cette équation se change dans celle-ci

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{a^2 b^2}{4} \left(\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \frac{d^2\psi}{dy_1^2} + \frac{d^2\psi}{dz_1^2}\right) + \frac{(2y - 3a^2 b)}{4 z_1} b \frac{d\psi}{dz_1} - \frac{(y - a^2 b) b}{z_1} \psi \quad (19)$$

laquelle, d'après notre théorème général, et la forme (26) de l'intégrale de l'équation (24) de la page 98 a pour intégrale une expression qu'on peut écrire comme il suit

$$\left.\begin{aligned} \psi = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} (f x_1, y_1, z_1, t, \xi, u, v)\, \Phi \left(\left[x_1 + \frac{ab}{2} t \cos u\right] \cos x, \left[y_1 + \frac{ab}{2} t \sin u \sin v\right] \cos x \right. \\ \left. \left[z_1 + \frac{ab}{z} t \sin u \cos v\right] \cos x\right) du\, dv\, dx \\ + \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} f (x_1, y_1, z_1, t, \xi, u, v)\, \Xi \left(\left[x_1 + \frac{ab}{2} t \cos u\right] \cos x, \left[y_1 + \frac{ab}{2} t \sin u \sin v\right] \cos x \right. \\ \left. \left[z_1 + \frac{ab}{2} t \sin u \cos v\right] \cos x\right) du\, dv\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Supposons maintenant qu'à l'origine du mouvement on n'ait ébranlé qu'une portion de la masse d'air comprise dans une sphère, dont le rayon très-petit soit ε. Intégrant l'équation précédente rela-

tivement à z, pour en déduire la valeur de φ, et ensuite différentiant relativement à toutes les variables indépendantes pour former les valeurs des vitesses et condensations parallélement aux axes coordonnés, et cela après avoir mis au lieu de x_1, y_1, z_1, les variables primitives, on voit qu'il ne peut y avoir mouvement que quand les équations suivantes ont lieu:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\frac{x}{\sqrt{1+bz}}+\frac{ab}{2}t\cos u=\frac{b}{2}\frac{\omega\cos\alpha}{\sqrt{1+b\,\omega\sin\alpha\cos\beta}},\\
&\frac{b}{2}\frac{y}{\sqrt{1+bz}}+\frac{ab}{2}t\sin u\sin v=\frac{b}{2}\frac{\omega\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+b\,\omega\sin\alpha\sin\beta}},\\
&\sqrt{1+bz}+\frac{ab}{2}t\sin u\cos v=\sqrt{1+b\,\omega\sin\alpha\sin\beta},
\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

ω étant une quantité positive comprise entre zéro et ε, et par conséquent très-petite.

Des équations précédentes en déduit encore facilement qu'il n'y a de mouvement que quand l'équation

$$1+bz+\frac{b^2}{4}\frac{x^2}{1+bz}+\frac{b^2}{4}\frac{y^2}{1+bz}=\left(\frac{ab}{2}t+\rho\right)^2\qquad(22)$$

aura lieu (ρ étant égal à la racine carrée de la somme des carrés des seconds membres de ces équations).

Pour mieux voir la forme de l'onde qui en résulte posons

$$\frac{ab}{2}t+\rho=\theta,\quad\text{et}\quad z=z'+\frac{t^2-2}{2b};$$

l'équation précédente se transforme dans celle-ci

$$z'^2+\frac{1}{4}(x^2+y^2)=\frac{\theta^4+4}{4b^2};\qquad(23)$$

qui montre que la surface de l'onde est celle d'un ellipsoide de révolution aplati, dont les axes principaux sont

$$2\frac{\sqrt{\theta^4+4}}{b},\ 2\frac{\sqrt{\theta^4+4}}{b},\ \frac{\sqrt{\theta^4+4}}{b},$$

et dont le centre, au bout du temps t, a parcouru l'espace $\frac{t^2-2}{2b}$, suivant l'axe des z'.

A une grande distance du centre d'ébranlement, la vitesse suivant l'axe des x et y est à peu près a, et $\frac{a^2b}{4}t$ suivant l'axe des z (partie positive). Cela a lieu du moins lorsque t est devenu assez grand pour qu'on puisse prendre θ^4+4 pour θ^4 et $\frac{ab}{2}t+1$, pour $\frac{ab}{2}t$.

Si au mouvement suivant l'axe des z' dans l'ellipsoide on ajoute le mouvement du centre lui-même, on aura $\frac{a^2b}{2}t$ pour représenter cette vitesse.

Sans déplacer le centre des coordonnées, l'équation (22) est suffisante pour faire voir que le mouvement suivant l'axe de z est uniformément accéléré, constant suivant les deux autres, et que dans les plans parallèles à celui des xy, il croit du côté des z positifs, au fur et à mesure que cette variable augmente; que le contraire a lieu du côté des z négatifs; etc.

L'équation (22), réduite à une seule dimension, en faisant x et y égaux à zéro, reproduit l'égalité (17).

Je dois ajouter que tous les théorèmes sur la propagation du mouvement que nous avons démontrés précédemment ont lieu même quand on ne suppose pas que la vitesse des molécules est très-petite; mais, qu'ils ont lieu au contraire, quand on suppose la vitesse quelconque. Mais comme la démonstration se fonde sur des principes bien différents de ceux dont nous nous sommes servi précédemment, je la réserve pour une autre occasion.

VI.

Réunissant tout ce que nons avons dit précédemment, on peut énoncer le principe suivant, qu'on doit regarder comme une loi de la nature:

La propagation du mouvement dans une masse gazeuse indéfinie ne dépend ni des forces accélératrices qui sollicitent ses molécules (pourvu qu'elles ne soient pas fonctions immédiates du temps), *ni de la vitesse plus ou moins grande dont ces molécules peuvent être animées.*

VII.

Le théorème qu'on vient d'énoncer ne s'applique pas au mouvement des corps élastiques solides, tant que les équations du problème conservent la forme que leur ont donnée POISSON et NAVIER. Cette différence tient à ce que dans ces équations les quantités qui représentent les forces accélératrices ne multiplient pas la variable fonction, ainsi qu'il arrive à l'équation (1). Cette différence dans les équations différentielles en introduit une très-grande dans leurs intégrales; c'est-à-dire celle qui existe entre équations ayant ou n'ayant pas de second membre. Or, cette différence ne laisse pas subsister le théorème énoncé plus haut.

VIII.

D'après ce qu'on a vu précédemment, le théorème sur la composition des fonctions arbitraires permet la résolution de certains problèmes sans connaître l'intégrale de l'équation différentielle, mais seulement sa forme générale, laquelle est indiquée par ce théorème: il ne faut même pas réduire cette intégrale à la forme finie, moyennant les intégrales définies. Des séries infinies permettent d'arriver au même résultat et avec la même facilité.

Pour le faire voir prenons le problème de la chaîne pesante, résolu par POISSON à la fin de son Mémoire, déjà cité, sur la théorie du son.

Représentant par x la distance qu'il y a du point de suspension de la chaîne à un point quelconque, dont la position est donnée par cette coordonnée; représentant encore par y et z les autres

coordonnées du même point au bout du temps t, coordonnées qu'on supposera s'évanouir avec cette variable; prenant l'axe des x dans la direction de la chaîne dans son état d'équilibre; représentant encore par y et l la gravité, supposée constante, et la longueur totale de la chaîne, on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g(l-x)\frac{d^2y}{dx^2} - g\frac{dy}{dx}, \tag{24}$$

pour l'équation qui doit déterminer y en fonction de x et t. L'équation qui donne z étant absolument de la même forme, il est inutile de l'écrire, ce que nous avons à dire de l'une s'appliquant exactement à l'autre.

Les fonctions arbitraires de cette équation sont

$$\varphi\left(\sqrt{l-x} + \frac{\sqrt{y}}{z}t\right), \qquad \psi\left(\sqrt{l-x} - \frac{\sqrt{y}}{z}t\right), \tag{25}$$

on peut donc prendre, pour représenter l'intégrale de l'équation (24) la série

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \alpha\varphi + \alpha_1\varphi' + \alpha_2\varphi'' + \cdots \\ & + \beta\psi + \beta_1\psi' + \beta_2\psi'' + \cdots \end{aligned}\right\}, \tag{26}$$

φ', φ'' étant les dérivées successives de φ, ainsi que ψ', ψ'', $\cdots$ celles de ψ; α_1, α_1, α_2, $\cdots$ β, β_1, β_2, $\cdots$ fonctions à déterminer et que, d'après la forme de l'équation proposée, nous pouvons regarder comme fonctions de x seulement. On fait cette détermination en substituant la suite précédente dans l'équation (24) et en égalant à zéro les coefficients des dérivées de φ et ψ; ce qui donne autant d'équations que d'inconnues; mais cette détermination n'est pas nécessaire.

L'équation (26), ayant deux fonctions arbitraires, est l'intégrale générale de l'équation (24); mais ce qu'elle a de caractéristique c'est de contenir des fonctions arbitraires de la proposée non développées: c'est à cause de cela seulement que la solution suivante, qui emploie des séries infinies sans les déterminer tout à fait, est exacte.

Supposons qu'on ait ébranlé une partie de la chaîne comprise entre $x = \delta$ et $x = \delta + \varepsilon$; tout le reste étant en repos. Différentiant la série (26) relativement à t, nous avons une équation de la même forme; et comme les premiers membres de ces équations sont égaux à zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre δ et $\delta + \varepsilon$, il s'en suit que la même chose doit arriver aux seconds. Or, on satisfait à toutes ces conditions, en supposant que les fonctions arbitraires φ et ψ ainsi que toutes ces dérivées seulement aient des valeurs, tant que les quantités qu'elles renferment sont comprises entre les limites $\sqrt{l-\delta-\varepsilon}$, $\sqrt{l-\delta}$ (chose qu'on peut toujours faire, sans connaître ces fonctions, moyennant le théorème de Fourier). Faisant donc ω une quantité positive et moindre que ε, il n'y a pas de mouvement tant que l'équation

$$\sqrt{l-x} \pm \frac{\sqrt{y}}{2}t = \sqrt{l-\delta-\omega}, \tag{27}$$

n'a pas lieu. Elle comprend les deux équations

$$\sqrt{l-x} + \frac{\sqrt{y}}{z}t = \sqrt{l-\delta-\omega}, \tag{28}$$

$$\sqrt{l-x} - \frac{\sqrt{y}}{z}t = \sqrt{l-\delta-\omega}. \tag{29}$$

Comme t et x sont toujours positifs, la première équation ne peut pas exister tant qu'on a $x > \delta + \omega$; et, par conséquent, donne le mouvement au-dessous du centre d'ébranlement. La seconde

n'ayant lieu que quand $x > \delta + \omega$, s'applique à la partie de la chaîne comprise entre le point de suspension et celui où l'ébranlement commence.

L'une et l'autre donnent

$$x = \delta + \omega + t\sqrt{y(l - c - \omega)} - \frac{y t^2}{4}, \tag{30}$$

$$c - x = \quad - \omega + t\sqrt{y(l - c - \omega)} + \frac{y t^2}{4}; \tag{31}$$

ce qui montre qu'une onde descendra de la chaîne d'un mouvement uniformément retardé, la force retardatrice étant la moitié de la pesanteur; et qu'une autre montera d'un mouvement uniformément accéléré, dont la force accélératrice est aussi la moitié de la pesanteur, comme l'avait trouvé Poisson.

IX.

Si, au lieu de chercher d'abord les fonctions arbitraires qui entrent sous les fonctions arbitraires dans l'équation (24), nous avions pris une intégrale en série, contenant deux fonctions arbitraires, sans faire attention aux quantités qu'elles devaient renfermer (ce qu'on ferait, par exemple, en prenant $\varphi(x + bt)$ et $\psi(x - bt)$ pour ses fonctions arbitraires); si, les substituant dans l'équation (24) et substituant ensuite cette série dans l'équation proposée, afin de déterminer α, α_1 etc., nous procédions a la solution du problème, suivant la marche que venons de tracer tout à l'heure, nous arriverions à des résultats tout à fait faux. Ce qui montre la nécessité, quand on fait usage des suites infinies, contenant des fonctions arbitraires, et qu'on ne détermine pas complètement celles-ci en fonction de l'état initial, de déterminer d'avance la composition de ces fonctions. Je fais cette observation parce que Poisson, dans son Mémoire sur le son, fait usage de pareilles séries, sans entrer d'ailleurs dans aucun développement sur les fonctions arbitraires, qu'il ne détermine pas en fonction d'état initial, et arrive, il est vrai, à des résultats exacts; mais cette marche-là aurait pu de même le conduire à des conséquences tout à fait fausses.

X.

Les géomètres qui jusqu'ici ont traité la théorie du son, ont mis de côté l'influence de la gravité et supposé l'air impondérable. Poisson, dans le cas de la gravité constante, pense avoir résolu la question, mais il y a à cet égard une singulière méprise dans son Mémoire. En effet, dans la page 327 du XIV^e cahier du Journal de l'École Polytechnique, il dit: «Tout ce que nous venons de dire «suppose la température et la densité constantes dans toute la masse de l'air; mais comme la vitesse «du son est égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité de l'air à sa densité (quand on néglige «la correction due au développement de la chaleur), il s'ensuit que toutes les fois que ce rapport ne «changera pas, la vitesse du son ne changera pas non plus; d'où nous pouvons conclure qu'en sup-

« posant toutes les couches de l'atmosphère à la même température, la vitesse du son doit être la « même que si la densité de l'air ne variait pas en passant d'une couche à l'autre, car dans ce passage l'élasticité varie dans le même rapport que la densité, quelle que soit la loi de la pesanteur. » Ce raisonnement n'est pas exact. D'où POISSON a-t-il conclu que la vitesse du son est égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité à la densité de l'air? Comment suppose-t-il connu ce qu'il cherche lui-même? La vitesse donnée ci-dessus est celle qu'on rencontre quand on fait abstraction de l'action de la pesanteur et de toute autre force, et comme la condensation, alors à l'état d'équilibre, disparaît, il s'en suit que, faisant toujours abstraction des forces, la vitesse est la même quand les milieux changent de densité, pourvu que l'élasticité change dans le même rapport, car l'équation différentielle du problème ne change pas. Mais il n'en est pas de même, quand on introduit des forces; les équations différentielles changent, et, exigent, par conséquent, une nouvelle solution.

Ce géomètre forme ensuite l'équation différentielle du problème, en supposant la pesanteur constante, puis transforme les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires r, u, ω, qui ont la même origine que les premières: r est le rayon vecteur; u, le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec un des axes coordonnés; ω l'angle que fait la projection du rayon vecteur sur le plan des deux autres axes, avec un de ces derniers axes. Il dit à la page 372: « Afin de ne pas nous jeter dans de trop longs calculs, supposons la fonction φ, indépendante de u et ω. » φ est la quantité dont la différentielle par rapport à x, y et z donne la vitesse suivant les axes respectifs de x, y et z. Dans une masse d'air, partout d'égale densité, si on donne à une sphère d'air des vitesses égales sur tous les rayons vecteurs, on peut supposer, ainsi que l'ont fait LAGRANGE et EULER, la vitesse du son fonction seulement du rayon et du temps. On pourrait encore faire la même supposition, si la densité étant fonction quelconque du rayon mené autour d'un point quelconque de la masse fluide, l'ébranlement avait lieu autour de ce point, et n'était que fonction de ce rayon. Mais, supposer, comme le fait POISSON, que la vitesse des molécules n'est que fonction de r et t, dans une masse dont la densité n'est pas fonction de ce rayon, c'est faire une hypothèse entièrement arbitraire, repoussée par le raisonnement et par le calcul, car si la vitesse du son est constante, ainsi que nos calculs le prouvent, celle des molécules ne l'est pas.

Après avoir supposé la vitesse des molécules fonction seulement du rayon vecteur et du temps, il arrive à une équation différentielle, comprise parmi celles que LAPLACE a intégrées par des intégrales définies dans les anciens Mémoires de l'Académie des Sciences, et dont il tire différentes conclusions: Il dit, page 328: « L'équation aux différences partielles qui renferme la théorie du son, change de « forme quand on a égard à la pesanteur de l'air et à la variation de température. Pour en déduire « directement la vitesse avec laquelle le son se prolonge, il faut employer l'intégrale de cette équation, « exprimée au moyen d'une intégrale définie, et l'on est conduit de cette manière à l'expression de la « vitesse que nous ont indiquée les considérations précédentes. Cette même intégrale fournit aussi un « moyen de déterminer l'intensité du son produit à différentes hauteurs dans l'atmosphère. Lorsque la « température est supposée constante, on parvient à ce résultat remarquable, que l'intensité du son ne « dépend que de la distance qu'il a parcourue, et de la densité de la couche de l'atmosphère d'où il « est parti; de sorte que cette intensité est la même, dans tous les cas, que si l'atmosphère était homo- « gène et d'une densité égale à celle de cette couche; il suit de là que les personnes qui s'élèvent en « ballon, doivent entendre le bruit qui a lieu à la surface de la terre, aussi bien que si elles fussent « à cette surface même; tandis que le bruit qu'elles produisent dans une couche élevée de l'atmosphère, « est aussi facilement entendu à la surface de la terre, qu'il le serait dans cette même couche, à « distance égale. » Ces résultats sont exacts, mais étant déduits d'une équation inexacte, ils doivent

être regardés comme non démontrés. Dans mes Mémoires, j'en ai donné des démonstrations rigoureuses, en conservant à l'air ses trois dimensions.

Poisson cherche encore à déterminer le mouvement d'une ligne d'air dans le cas où la vitesse des molécules n'est pas très-petite; mais cet illustre géomètre fait encore une hypothèse qui ne nous semble pas admissible; c'est à dire qu'il suppose que la vitesse des molécules est plus petite que celle du son. En vérité, il commence par supposer ces vitesses moindres que θ, et c'est après qu'il trouve que θ est la vitesse du son. Dans tous les cas la quantité θ étant bien petite, et les vibrations moléculaires généralement très-rapides, le cas résolu par Poisson ne nous semble pas très-étendu.

XI.[1]

Nous allons maintenant montrer, par un exemple, comment notre théorème sert à intégrer les équations aux différences partielles.

Prenons l'équation

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2} - \frac{m}{x^2} z\right); \tag{32}$$

d'après notre théorème, son intégrale peut être donnée par

$$z = \int_0^{\pi} X \varphi (x \cos \theta + a t)\, d\theta: \tag{33}$$

ou de beaucoup d'autres manières, comme par exemple

$$z = \int_0^{+1} X \varphi (x + a t \theta)\, d\theta,$$

mais toujours de sorte que les quantités qui se combinent avec les binomes $x + at$, $x - at$, se réduisent à l'unité quand on donne à θ des valeurs que prend cette variable aux limites des intégrations. Adoptons l'équation (33), et, pour la commodité du calcul mettons $X \sin^r \theta$ au lieu de X: elle se réduit à

$$z = \int_0^{\pi} X \sin^r \theta \varphi (x \cos \theta + a t)\, d\theta, \tag{34}$$

X étant une quantité qu'il s'agit de déterminer. La forme de l'équation proposée permet de supposer, comme il est facile de le voir, X constant relativement à t, de sorte que cette quantité doit être regardée comme une fonction de x et de θ qu'il s'agit de déterminer: en voici le moyen.

Différentions l'équation (34) relativement à x et t, et substituons le résultat dans la proposée: nous aurons, après une petite réduction

$$0 = -\int_0^{\pi} X \sin^{r+2} \theta \varphi''\, d\theta + 2\int_0^{\pi} \frac{dX}{dx} \sin^r \theta \cos \theta \varphi' d\theta + \int_0^{\pi} \frac{d^2 X}{dx^2} \sin^r \theta \varphi d\theta - m\int_0^{\pi} \frac{X}{x^2} \sin^r \theta \varphi d\theta; \tag{35}$$

---

[1] Ceci a été rédigé après les N^{os} IX et suivants du *Mémoire sur un théorème de Calcul intégral* etc. Voyez ci-dessus page 113 et suivantes.

que, des intégrations par parties réduisent à

$$0 = \int_0^{\pi} \left(\frac{\left[d \cdot \left(\frac{X}{x} \sin^{r+1} \theta \right) \right]}{x \sin \theta d\theta} + 2 \frac{d \cdot \left(\frac{1}{x} \frac{dX}{dx} \sin^{r-1} \theta \cos \omega \right)}{d\theta} + \frac{d^2 X}{dx^2} \sin^r \theta - m \frac{X}{x^2} \sin^r \theta \right) \varphi d\theta$$
$$+ \left[\frac{X}{x} \sin^{r+1} \theta \varphi' + \frac{d \cdot \left(\frac{X}{x} \sin^{r+1} \theta \right)}{x \sin \theta d\theta} \varphi - \frac{2}{x} \frac{dX}{dx} \sin^{r-1} \theta \cos \theta \varphi \right]_0^{\pi}. \quad (36)$$

Comme relativement aux différentations de x, tous les termes de cette équation sont de la forme $x^k \frac{d^k X}{dx^k}$, il en résulte que X peut être supposé de la forme $x^h \Theta$, Θ étant fonction de θ seulement.

De là pour déterminer X on déduit

$$- \frac{d \cdot \left[\frac{d \cdot \left(\frac{X}{x} \sin^{r+1} \theta \right)}{x \sin \theta d\theta} \right]}{d\theta} + 2 \frac{d \cdot \left(\frac{1}{x} \frac{dX}{dx} \sin^{r-1} \theta \cos \theta \right)}{d\theta} + \frac{d^2 X}{dx^2} \sin^r \theta - m \frac{X}{x^2} \sin^r \theta = 0. \quad (37)$$

Il ne s'agit pas de trouver l'intégrale générale de cette équation, (puisque les fonctions arbitraires sont déjà connues), mais seulement une valeur qui puisse la satisfaire: il faut que cette valeur rende identique l'équation

$$\frac{X}{x} \sin^{r+1} \theta \varphi' + \frac{d \cdot \left(\frac{X}{x} \sin^{r+1} \theta \right)}{x \sin \theta d\theta} \varphi - \frac{2}{x} \frac{dX}{dx} \sin^{r-1} \theta \cos \theta \varphi = 0, \quad (38)$$

quand on y met 0 et π au lieu de θ.

Comme relativement aux différentiations de x, tous les termes de l'équation (37) sont de la forme $x^k \frac{d^k X}{dx^k}$, il s'en suit que X peut être supposé de la forme $x^h \Theta$, Θ étant seulement fonction de θ. Exécutant les différentiations indiquées et sommant les différents termes, on voit qu'il est possible de faire Θ constante, pourvu que h et r soient déterminées par les équations

$$2h = r + 1, \qquad h(h-1) - m = 0. \quad (39)$$

L'équation aux limites (38), eu égard à ces équations se réduit à

$$x^{h-1} \sin^{r+1} \theta \varphi' = 0; \quad (40)$$

ce qui exige que $r + 1$, et, par conséquent, h soit positif.

Représentant donc par h_1 et h_2 les deux racines de la seconde équation (39) et par r_1, r_2 les deux valeurs, correspondantes de r, l'intégrale de l'équation proposée prend la forme

$$z = x^{h_1} \int_0^{\pi} \varphi (x \cos \theta + at) \sin^{r_1} \theta d\theta$$
$$+ x^{h_2} \int_0^{\pi} \psi (x \cos \theta + at) \sin^{r_2} \theta d\theta \quad (41)$$

comme l'a trouvé Poisson dans le 19me cahier du Journal de l'École Polytechnique.

Si nous étions parti de l'équation

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{a^2}{x^2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2} - \frac{m z}{x^2}\right); \tag{42}$$

observant que ses fonctions arbitraires qui d'après ce que nous avons dit précédemment, dépendent des équations

$$\frac{d u^2}{d t} = \frac{a^2}{x^2}\frac{d u^2}{d x^2}, \quad d z = \frac{d z}{d y} d x + \frac{d z}{d y} d t \tag{43}$$

sont

$$\varphi\left(a t + \frac{1}{2} x^2\right), \qquad \psi\left(a t - \frac{1}{2} x^2\right), \tag{44}$$

nous trouverions pour son intégrale en procédant comme précédemment,

$$\left.\begin{aligned} z = x^{h_1}\int_0^{\pi}\varphi\left(\frac{1}{2} x^2 \cos\omega + a t\right)\sin^{\frac{h'-1}{2}}\omega\, d\omega \\ + x^{h_2}\int_0^{\pi}\psi\left(\frac{1}{2} x^2 \cos\omega + a t\right)\sin^{\frac{h''-1}{2}}\omega\, d\omega \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

h' et h'' étant les deux racines de l'équation $h\,(h-1) - m = 0$, m pourtant étant tel qu'on ait $\frac{h-1}{2} > 2$ ou $\frac{h-1}{2} = 2$, chose dont je demande la vérification au lecteur, ne pouvant pas la faire moi-même.

XII.

L'équation

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = a^2 \frac{d^2 z}{d x^2},$$

a pour intégrale, comme on sait,

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\varphi\,(x + 2 a \omega\sqrt{t})\, d\omega;$$

l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = a^2\left(\frac{d^2 z}{d x^2} - \frac{m}{x^2} z\right) \tag{46}$$

doit donc être de la forme

$$z = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} f(\theta, x)\ \varphi(x\cos\theta + 2 a \omega\sqrt{t})\, d\omega\, d\theta, \tag{47}$$

$f(\theta, x)$ étant une fonction de θ et de x qu'on détermine comme on a déterminé précédemment X. On arrive de cette manière à l'intégrale donnée par Poisson dans le Mémoire cité plus haut.

Il ne faut pas oublier pourtant que ce dernier résultat est fondé seulement sur une induction.

XIII.

Reprenons l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dx^2}. \tag{47bis}$$

Son intégrale peut être représentée par

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(a)\cos amt \cos m(x-a)\,dm da \\ & + \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\frac{\sin amt}{m}\cos m(x-\alpha)\,dm da. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Posons $\alpha = x + a\beta t$: l'expression précédente se transforme dans celle-ci

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \frac{at}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x+\beta at)\cos amt \cos(mat\beta)\,dm d\beta \\ & + \frac{2\pi}{l}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m} f(x+\beta at)\cos amt \cos(mat\beta)\,dm d\beta. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Mais, en vertu de notre théorème (les fonctions arbitraires de (47bis) étant $F(x-at)$ et $f(x+at)$ les intégrales précédentes relatives à β doivent être prises entre les limites -1 et $+1$; chose qu'on peut en effet vérifier (voir DUHAMEL, Cours d'Analyse).

L'exemple précédent fait voir comment quelques intégrales qui semblent se refuser à la forme que leur donne notre théorème y reviennent pourtant.

Dans plusieurs Mémoires de POISSON sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques, on trouve différents exemples d'intégrales qui sont toujours nulles hors des limites données.

XIV.

Donnons maintenant l'intégrale de l'équation de la page 258, que nous avons promise précédemment. Ecrivons-la comme il suit

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + b^2\varphi; \tag{50}$$

de l'intégrale de cette équation on passera à celle de l'autre en mettant at au lieu de t.

On satisfait à l'équation (50) en prenant

$$\varphi = A e^{t\sqrt{n^2+p^2+q^2+b^2}+nx+py+qz}$$

A, n, p et q étant des arbitraires. Le radical pouvant être également positif ou négatif, et l'équation linéaire, la somme de deux fonctions de cette forme vérifie aussi l'équation. On aura donc, faisant pour abréger $q^2+b^2 = r^2$,

$$\varphi = A\int_0^{\pi} e^{\cos\omega t\sqrt{r^2+n^2+p^2}+nx+py+qz} t\sin\omega\, d\omega$$

expression qu'un théorème bien connu de Poisson sur la réduction des intégrales doubles en intégrales simples, réduit à

$$\varphi = A\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{t(r\cos u + n\sin u\sin v + p\sin u\cos v) + nx + py + qz} t\sin u\, du\, dv.$$

On peut encore remplacer cette expression par celle-ci

$$\varphi = A\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{t(r\cos u\cos\xi + u\sin u\sin v + p\sin u\cos v)}\, t^2\sin u\cos v\, e^{nx+py+qz}\, du\, dv\, d\xi.$$

Mettant au lieu de v sa valeur, et en ayant égard en outre à la formule

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(y\cos u + h\sin u\sin v)\sin u\, du\, dv = 2\pi\int_0^{\pi}\varphi(\sqrt{y^2+h^2}\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$$

qui est un cas particulier du théorème cité de Poisson, on peut remplacer l'égalité précédente par celle-ci

$$\varphi = A\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t(b\cos u\sin\chi\sin\psi + y\cos u\cos\chi + n\sin u\sin v + p\sin u\cos v) + nx+py+qz} \left\{ t^2\sin\chi\sin u\cos u\, du\, dz\, dv\, d\psi \right.$$

d'où on déduit, ayant égard à la forme de l'équation proposée,

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{bt\cos u\sin\chi\sin\psi}\,\Phi(x + t\sin u\sin v,\ z + t\cos u\cos\chi,\\ &\qquad y + t\sin u\cos v)\, t^2\sin\chi\sin u\cos u\, du\, d\chi\, dv\, d\psi\\ &+\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{bt\cos u\sin\chi\sin\psi}\,\Xi(x + t\sin u\sin v, z + t\cos u\cos\chi,\\ &\qquad y + t\sin u\cos v)\, t^2\sin\chi\sin u\cos v\, du\, d\chi\, dv\, d\psi\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

qui est l'intégrale cherchée.

XV.

Nous pouvons encore obtenir facilement l'intégrale de l'équation (18) ou, ce qui est la même chose de l'intégrale (19), qui donne le mouvement de l'air quand la pesanteur est supposée constante et les températures variables selon la loi qui résulte des réfractions astronomiques.

Mettons dans cette dernière équation $\frac{2t}{ab}$ au lieu de t, α et β au lieu de $\frac{2y - 3a^2b}{z\,\frac{a^2b^2}{4}}b$, $\frac{a^2b - y}{\frac{a^2b^2}{4}}b$,

elle se réduit, en supprimant les indices des lettres x, y et z à

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{\alpha}{z}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{\beta}{z^2}\psi, \quad (52)$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$\psi = Ce^{tnu + nx + py} Z.$$

Z étant une fonction de z seulement. Substituant cette valeur de ψ dans l'équation (52) on aura pour déterminer Z, l'équation

$$z^2 \frac{d^2 Z}{dz^2} + az \frac{dZ}{dz} + (\beta - \rho^2 z^2) Z = 0 \text{ avec } (\rho^2 = m^2 - n^2 - p^2) \tag{53}$$

qui se trouve intégrée dans un Mémoire que je présente à l'Académie. En observant que $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 - \beta > 0$ (voyez le Mémoire sur la théorie du son de Poisson) on trouve pour intégrale

$$Z = C_1 x^\delta \int_0^\pi e^{\rho z \cos \omega} \sin^{2k-1} \omega d\omega,$$

δ et k étant déterminés par les équations

$$\delta = \frac{1-\alpha}{2} \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 - \beta}, \quad k = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 - \beta}.$$

On aura donc pour intégrale parliculière de notre équation

$$\psi = Ce^t \sqrt{n^2+p^2+\rho^2} + nx + py \int_0^\pi e^{\rho z \cos \omega} z^\delta \sin^{2k-1} \omega d\omega. \tag{54}$$

L'expression

$$\psi = C \int_0^\pi \int_0^\pi z^\delta e^{t \sqrt{n^2+p^2+\rho^2} \cos \chi + nx + py + \rho z \cos \omega} t \sin \chi \sin^{2k-1} \omega \, d\omega \, d\chi \tag{55}$$

en est encore une. Le théorème de Poisson la transforme dans celle-ci

$$\psi = C \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z^\delta e^{nt \cos u + pt \sin v + \rho t \sin v \cos v} t \sin u \sin^{2k-1} \omega \, e^{nx + py + \rho z \cos \omega} d\omega \, du \, dv$$

De là résulte et de la forme de l'équation (52) que son intégrale générale est

$$\left.\begin{aligned} \psi = &\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z^\delta t \, \Phi(x + t \cos u, y + t \sin u \sin v, z \cos \omega + t \sin u \cos v) \\ &\qquad \sin^{2k-1} \omega \sin v \, d\omega \, du \, dv \\ &+ \frac{d}{dt} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z^\delta t \, \Xi(x + t \cos u, y + t \sin u \sin v, z \cos \omega + t \sin u \cos v) \\ &\qquad \sin^{2k-1} \omega \sin v \, d\omega \, du \, dv. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

On peut varier de plusieurs manières les deux dernières intégrales.

Addition au précédent Mémoire.

Dans cette addition au précédent Mémoire, je vais résoudre certaines questions qui ont été déjà résolues dans mon Mémoire et d'autres nouvelles, par une méthode, applicable non seulement à ces questions, mais à beaucoup d'autres de Physique mathématique; méthode au moyen de laquelle je réduis à la forme linéaire des équations différentielles de problèmes qui ne se présentaient pas sous cette forme. Pour qu'on voie clairement en quoi elle consiste, entrons dans quelques détails.

Supposons un corps d'une forme quelconque, ayant une partie de sa masse échauffée d'une manière quelconque, et comme dans la théorie de la chaleur il n'y a que des rapports ou différences de température, le reste des corps peut être regardé comme ne contenant pas de calorique. Au bout d'un certain temps t, quelques parties du corps qui n'en avait pas, auront reçu du calorique: or, que ce phénomène soit regardé comme le résultat des vibrations d'un fluide stagnant ou comme un fluide dont la plus ou moins grande densité produit des températures plus ou moins élevées, le passage des parties échauffées à celles qui ne le sont pas ne se fait pas d'une manière brusque. *Natura non facit saltus*, disait l'ancienne école, et cette fois elle avait raison. Dans ces parties-là la température sera infiniment petite.

Supposons, quand $t = 0$, une masse de gaz ayant autour d'un certain point une partie ébranlée et les autres parties de la masse en repos au bout d'un certain temps t, quelques parties de la masse gazeuse seront en mouvement, d'autres en repos; mais dans leurs limites la vitesse sera infiniment petite. La même chose a lieu pour une masse solide élastique.

On peut dire encore la même chose sur la limite de l'ordre lumineux (vibrations normales).

Considérons encore le mouvement transversal d'une verge élastique, retenue par ses deux extrémités, si on éloigne la verge de sa position d'équilibre, elle fera d'un côté et de l'autre de cette position des oscillations; les vitesses des molécules seront plus au moins grandes suivant la position qu'elles occuperont sur la verge, et le plus ou moins grand éloignement de celle-ci de sa position d'équilibre. Mais quand la verge aura atteint son éloignement maximum d'un côté et de l'autre, leurs vitesses seront infiniment petites.

Généralement, dans le mouvement d'un système quelconque, certaines parties étant en repos et d'autres en mouvement, dans le passage de l'une de celle-ci à d'autres, les vitesses des molécules seront infiniment petites et évanouissantes.

La méthode dont je parle consiste à déterminer, quel que soit le temps, les parties du système dans lesquelles les vitesses seront infiniment petites et évanouissantes, c'est-à-dire les limites des par-

ties qui sont en mouvement; par exemple dans le problème de la propagation du son, les limites de l'onde sonore.

Il est facile de voir qu'ayant ces limites on en déduira les principales lois du mouvement.

Si on veut déterminer les points du système dans lesquels le mouvement est infiniment petit, ou les vitesses infiniment petites, et si on a une équation dont les termes renferment la vitesse des molécules élevées à différentes puissances et d'autres termes contenant des quantités comparables aux différentes puissances de la vitesse, on doit négliger les termes de l'ordre n comparativement à ceux de l'ordre $n - 1$; ceux de l'ordre $n - 1$ vis-à-vis de ceux de l'ordre $n - 2$, et ainsi de suite, comme on pratique dans le calcul différentiel.

Cette méthode est surtout utile, comme on peut déjà le voir, pour les équations qui ne sont pas linéaires. Si l'équation proposée n'a que des termes à une seule dimension, cette méthode ne produisant aucune simplification dans l'équation proposée, ne doit pas être employée, puisqu'il y aurait autant de difficulté à déterminer les vitesses des points limites que celles des autres.

Nous allons appliquer cette méthode à des problèmes résolus dans le précédent Mémoire, ainsi qu'à d'autres, dans lesquels les équations ne sont pas linéaires.

Prenons l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

qui renferme la loi de la propagation du mouvement du son suivant une ligne, les vitesses étant quelconques.

Dans cette équation $\frac{d\varphi}{dx}$, représentant la vitesse de la molécule dont la coordonnée est x, est une quantité infiniment petite, dans les limites qui séparent les parties qui sont en mouvement de celles qui sont en repos: $\frac{d\varphi}{dx}$ étant égale à $-a^2 s$ (s représentant la condensation dans le même point) est aussi une quantité très-petite ou infiniment petite du même ordre que le précédent. Si on veut donc déterminer seulement les limites de l'onde sonore à un instant quelconque, l'équation précédente se réduira à cette forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

attendu que les deux autres termes s'évanouissent devant ceux-ci.

L'équation que nous venons d'établir n'a lieu que pour les limites de l'onde; mais elle est suffisante pour trouver les lois de la propagation du son suivant la ligne d'air.

Son intégrale est, comme on sait,

$$\varphi = \psi(x + at) + \chi(x - at), \tag{2}$$

Prenant la différentielle pour former les valeurs de de la vitesse et de la condensation, on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi'(x + at) + \chi'(x - at),$$

$$-\frac{d\varphi}{a^2\,dt} = \frac{-1}{a}\psi'(x + at) + \frac{1}{a}\chi'(x - at).$$

Supposant que la partie qui a été ébranlée soit comprise entre $x = 0$ et $x = \varepsilon$, il est bien clair qu'il n'y aura de mouvement que tant que les inégalités

$$x \geqslant at \qquad \text{et} \qquad x < \varepsilon + at$$

auront lieu: les autres parties de la ligne comprises en dehors des valeurs de x (plus petites que at et plus grandes que $\varepsilon + at$) seront en repos.

De ces dernières conditions on déduit que la vitesse de l'onde est constante et égale à a; que sa largeur est ε; que le temps de vibration de chaque molécule est $\frac{\varepsilon}{a}$; tellement que la vitesse plus ou moins grande des molécules n'a pas d'influence sur la propagation du son.

Considérons l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + z\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + \frac{d\varphi^2}{dx^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{dv}{dx}\frac{d\varphi}{dx}, \tag{3}$$

qui donne aussi le mouvement de l'air suivant une ligne, quand on ne néglige aucun terme, et quand on suppose des forces quelconques; les deux termes

$$z\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}, \qquad \frac{d\varphi^2}{dx^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

s'évanouissant devant les autres quand on veut déterminer les limites de l'onde, on arrive à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{dv}{dx}\frac{d\varphi}{dx} \tag{4}$$

qui donne la loi du mouvement dans les points où les vitesses sont infiniment petites, c'est-à-dire dans les limites de l'onde.

L'intégrale de cette équation, d'après ce que nous avons vu précédemment, est de la forme

$$\left.\begin{aligned}\varphi = {} & \alpha\psi(x + at) + \alpha_1\psi'(x + at) + \alpha_2\psi''(x + at) + \cdots \\ & + \beta\psi(x - at) + \beta_1\psi'(x - at) + \beta_2\psi''(x - at) + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

De cette équation on déduit qu'il n'y a de mouvement que pour les valeurs de x comprises entre at et $\varepsilon + at$, ε étant la longueur de l'ébranlement primitif.

De là on déduit immédiatement les lois de la propagation du mouvement.

Prenons les formules les plus générales du mouvement

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + x &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}, \\ -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} + y &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}, \\ -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} + z &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

si l'on suppose

$$\int\frac{dp}{\rho} = P,$$

et si l'on a égard à l'égalité

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = dv,$$

les trois premières équations précédentes, multipliées respectivement par dx, dy, dz et sommées membre à membre, donnent

$$\left.\begin{aligned} -dP + dv = &\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\,dx\right) \\ &+ \left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\,dy\right) \\ &+ \left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\,dz\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Dans les limites de l'onde, les quantités u, v et w étant infiniment petites, l'équation précédente se réduit à

$$-dP + dv = \frac{du}{dt}\,dx + \frac{dv}{dt}\,dy + \frac{dw}{dt}\,dz. \qquad (8)$$

Le premier membre de cette équation étant une différentielle exacte relativement à x, y et z, il faut que la même chose ait lieu pour le second; ce qui exige que

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

soit une différentielle exacte.

Mais alors l'équation du mouvement se réduit à l'équation (3), de laquelle supprimant tous les termes du second ordre, nous avons l'égalité (4), qui n'a lieu que pour les limites de l'onde, mais de laquelle pourtant on déduit facilement toutes les lois du mouvement, et on a la confirmation ou la démonstration des théorèmes énoncés précédemment.

En commençant ce troisième extrait, j'avais l'intention de mettre en entier l'addition à mon Mémoire sur le son, ainsi que je l'ai dit; mais je ne l'ai pas fait du tout, parce que je ne peux presque pas écrire. Malade dans les yeux (je suis un peu mieux maintenant), des afflux continuels de sang à la tête et produisant de petites congestions, tantôt dans un œil, tantôt dans un autre, et me menaçant peut être de quelque chose de plus grave, tout cela réuni à une grande excitation nerveuse qui ne me permet presque pas de prendre une plume, trouvant qu'elle ne marche assez vite, à mon gré, me serviront, je crois, d'excuse devant l'Académie d'avoir présenté sous forme d'extraits des choses que j'ai l'intention de publier avec développements quand je serai en état de travailler.

Les extraits que je donne, comme extraits, étant pourtant développés, j'espère que l'Académie voudra bien former un rapport là-dessus ou, si c'est possible, les insérer, par des fragments, dans ses Comptes-Rendus.

Théorème sur les fonctions arbitraires.

(Fragment.)

Étant donnée l'équation du second ordre

$$Rr + Ss + Tt = V \qquad (1)$$

ou R, S, T, sont des fonctions quelconques de x et y; V une fonction de x, y, p et q, linéaire relativement aux deux dernières variables; r, s, t, p et q fonctions déterminées par les équations

$$dz = pdx + qdy \qquad dp = rdx + sdy$$
$$dq = sdx + tdy \qquad d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$$

son intégrale dépend des systèmes d'équations

$$dy - m'dx = 0, \qquad dy - m''dx = 0,$$
$$Rm'dp + Tdy - Vm'dx = 0, \qquad Rm''dx + Tdy - Vm''dx = 0,$$

m' et m'' étant les racines de l'équation

$$Rm^2 - Sm + T = 0.$$

Comme l'équation proposée est linéaire, R, S et T ne contiennent que x et y, et, par conséquent, il en est de même avec m' et m''.

L'équation

$$dy - mdx = 0,$$

est donc toujours intégrable, moyennant un facteur. On peut donc faire

$$f(x, y) = c,$$

c étant une constante arbitraire.

Au moyen de cette équation on peut regarder y comme fonction de x, et, par conséquent, en tirant la valeur de y, on aura un résultat de la forme

$$y = f_1(x, c);$$

et ensuite en représentant comme à l'ordinaire par $f'(x)$ la dérivée première de $f(x)$,

$$\frac{dz}{dy} = y = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{p}{f_1(x, \omega)},$$

Au moyen de ces deux équations, éliminant q et y entre elles et les égalités précédentes, on aura deux nouvelles équations ne contenant que p, z et x, desquelles éliminant p, nous aurons une équation entre deux variables seulement, et, par conséquent, toujours intégrable. Représentant donc cette intégrale par

$$f_2(x, z, y) = c_1$$

(ayant mis déjà au lieu de c sa valeur $(f(x, y))$, l'intégrale de l'équation proposée sera donc

$$f_2(x, y, z) = \varphi(f(x, y))$$

φ étant une caractéristique de fonction arbitraire.

Comme f est fonction seulement des trois coefficients R, S et T de l'équation proposée, il en résulte que les quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires dépendent des termes du second ordre, et nullement de la composition de l'équation relativement aux termes d'ordre inférieur.

On peut démontrer ce théorème d'une autre manière, mais il me semble qu'en lisant avec un peu d'attention la démonstration que je viens de donner, on trouvera, en lui donnant des développements que je supprime, pour abréger, qu'elle est satisfaisante.

En tirant la valeur de z, il est permis de l'écrire ainsi

$$.. \quad z = \alpha\varphi(f(x, y)) + \alpha_1\varphi'(f(x, y)) + \alpha_2\varphi''(f(x, y)) + \cdots$$

α, α_1, α_2, etc. étant fonctions de x et y.

Cette manière d'écrire la valeur de z résulte de ce que les fonctions arbitraires n'entrent pas d'une manière transcendante dans les équations linéaires et de ce que, d'après ce que nous avons vu, les quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires sont déterminées.

Pour déterminer α, α_1, α_2, etc. il n'y a qu'à substituer cette valeur de z dans l'équation proposée et égaler à zéro les coefficients des différentes dérivées de φ. Nous aurons autant d'équations que d'inconnues qui les détermineront complètement.

Comme m, racine d'une équation du second degré, a deux valeurs, il en résulte pour z deux valeurs aussi; mais comme l'équation proposée est linéaire la somme de ces deux valeurs de z sera encore une solution, laquelle contenant alors deux fonctions arbitraires sera l'intégrale générale.

De l'équation en question il est facile de passer à la forme d'intégrale définie que nous lui avons donnée dans les pages antérieures. Cependant tous les théorèmes que nous avons énoncés n'exigent pas cette transformation.

Le théorème que nous venons de démontrer pour l'équation du second ordre a lieu, et se démontre de la même manière, pour celles des ordres supérieurs ainsi que pour un nombre quelconque de variables. Mais je laisserai le soin de cette généralisation au lecteur, au moins pour cette fois.

ERRATA.

NB. Pour épargner la place nous indiquons une seule fois les fautes peu importantes qui se trouvent répétées.

Page.	
3, lig. 1	$f(0)+f(1)+f(2)+f(4)+\ldots$ l.: $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots$
3, lig. 5	qu'on obtient donnant, l.: qu'on obtient en donnant
3, lig. 6	la série des nombres naturels, l.: les valeurs de la série des nombres naturels
3, lig. 19	$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot n-1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \frac{x}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cos n\theta$ l.: $\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\ \frac{x^{2n+1}}{2_{n+1}}, \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$
3, lig. 25	valeur, l.: valeurs
4, lig. 4	MURPHEY, l.: MURPHY
4, lig. 13	satisfaisant à peine, l.: assujettie seulement
6, éq. (27)	$d\alpha\, d\alpha$ l.: $d\alpha\, d\omega$
7, lig. 18	constants, l.: constantes
9, éq. (45)	$\frac{fn(x)}{x-a_n}$ l.: $\frac{f_n(x)}{x-a_n}$
9, éq. (46)	$An = Bn$ l.: $A_n = B_n$
9, lig. 15	l'équations (42) donnerai, l.: l'équation (42) donnerait
9, lig. 28	la satisfait, l.: la vérifie
10, lig. 2	par multiple, l.: simple
10, lig. 9	m l.: n
10, lig. 17	supposition d'être les limites α et β constantes, l.: supposition que les limites α et β sont constantes
12, lig. 4—5	exponentielle comme suit, l.: exponentielles comme il suit
12, lig. 24	rappeller, l.: rappeler
13, lig. 1	Exercices du Calcul, l.: Exercices de Calcul
17, lig. 8	quelque, l.: quelles que
19, lig. 15	Exercices de Mathematique, l.: Exercices de Mathématiques
24, éq. (137)	+ l.: =
25, lig. 23	a et β l.: α et β
27, éq. (154)	$[f_1(x, \Phi(a_n))]_{x=a_n}$ l.: $\left[f_1(x, \Phi(a_n))\right]'x = a_n$
28, lig. 18	Quand l'équation, l.: Quand l'intégrale de
37, lig. 19	LEIBNITZ, l.: LEIBNIZ
39, lig. 20	nous ayons partie, l.: nous soyons parti
39, lig. 22	arrivés, l.: arrivé
41, lig. 27 et 29	suites — suite, l.: séries — série
43, lig. 24	transcendentes, l.: transcendantes
45, lig. 14	faira, l.: fera
52, lig. 18	prémièrement, l.: premièrement

Page.

53, lig. 8 — chaqu'une, l.: chacune

53, lig. 14 — égale, l.: égaler

53, lig. 20 — Allons, l.: Nous allons

54, lig. 24 — Connaisant, l.: Connaissant

56, lig. 4 — abreger, l.: abréger

56, lig. 7 — alterait, l.: altérait

56, lig. 15 — Il vaut très-souvent mieux de prendre, l.: Il vaut très-souvent mieux prendre

57, lig. 23 — sont polynômes, l.: sont des polynômes

57, lig. 35 — et leur faisant la somme, l.: et faisant la somme de ces valeurs

58, lig. 26 — par conséqnent, l.: par conséquent

58, lig. 27 — ascendentes, l.: ascendantes

62, lig. 10 — éxécutés, l.: exécutés

65, lig. 15 — sommataires, l.: sommatoires

67, lig. 2 — Quelque, l.: Quelle que

68, lig. 28 — vraiement, l.: vraiment

69, lig. 7 — pourvoir, l.: pouvoir

69, lig. 8 — Heureusement des tentatives, l.: Heureusement par

72, lig. 17 — géomètriques, l.: géométriques

72, lig. 20 — un solution, l.: une solution

75, lig. 8 — a pu restée, l.: a pu rester

81, lig. 3 — dans la supposition d'être $\omega - x$ une quantité, l.: dans la supposition que $\omega - x$ soit une quantité

81, lig. 3 — et on voulait, l.: et si on voulait

81, lig. 10 — nous sommes entrés, l.: nous sommes entré

81, lig. 21 — quelle que soit le nombre, l.: quel que soit le nombre

86, lig. 3 — déviennent, l.: deviennent

87, lig. 10 — régardé, l.: regardé

87, lig. 14 — Prénons, l.: Prenons

87, lig. 21 — somment, l.: sommant

89, lig. 1 — $\int^{x_1} \log(x^2 + x)\, dx$ lisez: $\int_k^{x_1} \log(x^2 + x)\, dx$

97, lig. 14 — indépendemment, l.: indépendamment

98, lig. 20 — comme, l.: comment

100, lig. 16 — ARISTOTTES, l.: ARISTOTE

101, lig. 39 — *Les mots*: «aber nichts als Kelchblätter» ne se trouvent pas dans le texte de Göthe

103, lig. 8 — équastions, l.: équations

103, lig. 9 — caractéritique, l.: caractéristique

105, éq. (63) — $R \frac{du^2}{dx}$ l.: $R \frac{du^2}{dx^2}$

107, lig. 20—21 — continuera encore à subsister? Dépendent encore les fonctions arbitraires de l'équation (72) seulement de ses termes du second ordre? l.: continuera-t-il encore à subsister? Les fonctions arbitraires de l'équation (72) dépendent-elles encore seulement de ses termes du second ordre?

109, lig. 4 — rélativement, l.: relativement

113, lig. 27 — quel était, l.: quelle est

113, lig. 28 — s'essais, l.: d'essais

113, lig. 31 — y étant même, l.: y étant même

115, lig. 21 — Quand, l.: Quant

121, lig. 37 — $\sin^r \theta\, X$ l.: $X \sin^r \theta$

128, lig. 27 — vais, l.: je vais

129, lig. 34 — une, l.: un

135, lig. 32 — supérieure, l.: supérieur

140, lig. 14 — algorythme, l.: algorithme

141, lig. 1 — expeditive, l.: expéditive

143, lig. 21 — quiétude, l.: repos

Page.

143, lig. 30 — molicule, l.: molécule

143, lig. 31 — faisons t croître, l.: faisons croître t

143, lig. 34 — après cette variable décroître, l.: **ensuite décroître cette variable**

162, lig. 29 — de moyen, l.: le moyen

163, lig. 6 — coté, l.: côté

163, lig. 23 — dispenser; l.: rejeter

164, lig. 8, éq. (1) $(x + \theta)$ l.: $\varphi\,(x + \theta)$

164, lig. 20 — et on voit, l.: et qu'on voit

165, lig. 25 — renvois, l.: renvoie

165, lig. 28 $\varphi\,(a) = \int_0^a \frac{d\,s}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$ l.: $\varphi\,(a) = \int_0^a \frac{d\,s}{(a-x)^n}$ **(voyez Tome 1, pag. 27)**

165, lig. 32 — on n'a pas trouvé, l.: on n'a trouvé

167, éq. (15)
167, éq. (27)
169, éq. (32)
169, éq. (36)
169, éq. (39)
170, éq. (40)
$\Gamma\,(u)$ l.: $\Gamma\,(n)$

170, lig. 18 $\theta^2 + 1^2$ l.: $\theta^2 + z^2$

172, lig. 3 — Les limites de l'intégrale sont a et b.

173, lig. 6 — ; β, a_1 b_1, l.: ; α, β, a_1

174, lig. 16 — **alléger, l.: abréger**

174, éq. (56) $\int_\alpha^\beta f\,(\theta)\,\theta^v\,d\,\theta$ l.: $\int_\alpha^\beta f\,(\theta)\,\theta^n\,d\,\theta$

174, éq. (57) et 58 $f_1\,(\theta)$ l.: $f_1\,(0)$

175, lig. 29 $\varphi\,(x) = e^{v\,x}$ l.: $\varphi\,(x) = e^{r\,x}$

177, éq. (83) $r - \lambda_2$, $r - \gamma_2$ l.: $r - \lambda_1$, $r - \lambda_2$

177, lig. 17 γ_1, γ_2 l.: λ_1, λ_2

177, lig. 24 $\frac{1}{r-\gamma_n}$ l.: $\frac{1}{r-\lambda_n}$

192, lig. 25 — VENDERMONDE, l.: VANDERMONDE

193, lig. 11 — on n'arrive point, en, l.: on n'arrive, en

194, lig. 21 — cas assez étendues, l.: cas assez étendus

195, lig. 24 — *supprimer*: (8)

198, lig. 6 — transendance, l.: transcendance

198, éq. (25) $C\,\Gamma^{(n+1)}$ l.: $C\,\Gamma\,(n+1)$

CABOT SCIENCE LIBRARY
CANCELLED
SEP NOV 9 1992

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.